. . . .

Cognome e nome | matricola | Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II | CALCOLO 2A | 15 dicembre 2006

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Dire se converge la seguente serie e, in caso affermativo, calcolarne la somma: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n}+\frac{1}{n!}\right)$.

SOLUZIONE. Si tratta di una serie ottenuta sommando termine a termine la serie geometrica di ragione $1/2$, convergente poiché la ragione è minore di 1, e la serie esponenziale con esponente 1, anch'essa convergente: dunque converge anche la serie data e la somma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n}+\frac{1}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-1=\frac{1}{1-1/2}+e-2=e.$$

---

2. Discutere al variare di $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\beta^{n}$.

SOLUZIONE. Considero la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}|\beta|^{n}$. Questa è a termini positivi, quindi applichiamo il criterio del rapporto: il quoziente

$$\frac{(n+1)^{\alpha}|\beta|^{n+1}}{n^{\alpha}|\beta|^{n}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}|\beta|$$

tende a $|\beta|$, dunque la serie considerata converge (e quindi la serie di partenza converge assolutamente) per ogni α se $|\beta|<1$. Se $|\beta|>1$, allora il termine generale della serie di partenza non tende a 0 (l'esponenziale di base β per $n\to+\infty$ ha il sopravvento sulla potenza n^{α}), quindi la serie non converge. Restano i casi $\beta=1$ e $\beta=-1$: nel primo, il termine generale della serie di partenza è semplicemente n^{α}, quindi la serie converge se e solo se $\alpha<-1$; nel secondo caso ($\beta=-1$) il termine generale della serie di partenza è $(-1)^{n}n^{\alpha}$, quindi la serie converge assolutamente se $\alpha<-1$ e semplicemente (grazie al criterio di Leibniz) se $\alpha\in[-1,0[$, non converge se $\alpha\geq 0$ (essendo violata la condizione necessaria).

3. Si consideri la funzione $\displaystyle f(x)=\frac{1}{|x-1|\sqrt{x}}$.

Si dica se convergono i seguenti integrali impropri:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx,\quad\int_0^{1}f(x)dx,\quad\int_1^{2}f(x)dx,\quad\int_2^{+\infty}f(x)dx,\quad\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

SOLUZIONE. Per $x\to 0^{+}$ la funzione è asintotica a $1/\sqrt{x}$, quindi il primo integrale converge. Per $x\to 1^{\pm}$ la funzione è asintotica a $1/|x-1|$, quindi il secondo e il terzo integrale divergono. Per $x\to+\infty$ la funzione è asintotica a $1/x^{3/2}$, quindi il quarto integrale converge. Infine, il quinto integrale non converge perché non convergono il secondo e il terzo.

---

4. Si consideri la funzione di due variabili reali $f(x,y)=\log(x^2-y-1)$.

(A) Si determini il dominio di f e lo si rappresenti nel piano. Si dica se è aperto, chiuso, compatto, connesso, limitato.

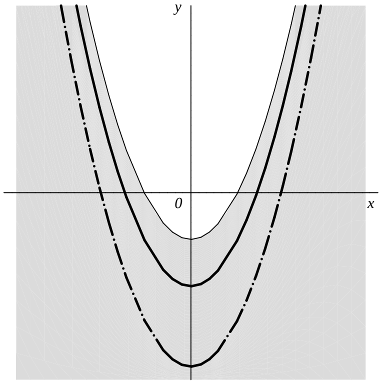
(B) Si determinino gli insiemi di livello $k\in\mathbb{R}$ di f e li si rappresenti nel piano per alcuni valori significativi di k. Si determinino gli insiemi
$N=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ f(x,y)<0\}$ e $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ f(x,y)>0\}$
e li si rappresenti nel piano.

(C) Si calcolino le derivate parziali di f e si dica se f è differenziabile nel suo dominio.

(D) Si dica se esistono punti stazionari di f e se esistono massimi e minimi relativi di f nel suo dominio. In caso affermativo si determinino.

(E) Si dica se esistono il massimo e il minimo assoluto di f nell'insieme $Q=[0,1]\times[-3,-2]$ e, in caso affermativo, si calcolino.

SOLUZIONE.



(A) Il dominio D di f è costituito da tutti e soli i punti (x, y) tali che $x^2-y-1 > 0$, ossia $y < x^2 - 1$. Il dominio è rappresentato nella figura a lato (zona grigia): la parabola $y = x^2 - 1$ (tratto continuo sottile) non appartiene all'insieme, che è quindi aperto e connesso poiché è connesso per archi; non è chiuso (in quanto non contiene il bordo), inoltre non è limitato, quindi non è compatto.

(B) L'insieme di livello k di f è costituito da $\{(x, y) \in D : \ y = x^2 - 1 - e^k\}$: nella figura a lato sono rappresentati con tratto più marcato i livelli con $k = 0$ (linea continua) e $k = 1$ (linea tratteggiata), corrispondenti rispettivamente alle parabole di equazione $y = x^2 - 2$ e $y = x^2 - 1 - e$. Inoltre, $N = \{(x, y) \in D : \ y > x^2 - 2\}$ e $P = \{(x, y) \in D : \ y < x^2 - 2\}$: nella figura a lato, N e P sono rispettivamente la zona compresa tra le parabole rappresentate con tratto continuo e quella al di sotto della parabola rappresentato con tratto continuo più marcato.

(C) Le derivate parziali di f sono

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y - 1}\,, \qquad f_y(x, y) = -\frac{1}{x^2 - y - 1}\ :$$

per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile in D.

(D) Non esistono punti stazionari di f, poiché f_y è sempre $\neq 0$. Poiché f è derivabile parzialmente in D e D è aperto, non esistono punti di massimo o minimo relativo, altrimenti questi dovrebbero essere anche stazionari. Non esistono nemmeno punti di massimo o di minimo assoluto di f in D, poiché $f(0, y)$ tende a $-\infty$ per $y \to -1$ e a $+\infty$ per $y \to -\infty$.

(E) Intanto, la funzione è continua in Q, che è compatto, quindi esistono massimo e minimo assoluto di f in Q. Per determinarli, è conveniente utilizzare la struttura delle linee di livello che abbiamo determinato precedentemente: la parabola di equazione $y = x^2 - 1 - e^k$ che interseca Q e che ha il valore di k più piccolo (rispettivamente, più grande) è quella con $k = 0$ (rispettivamente, $k = \log 3$), che interseca Q in $(-2, 0)$ (rispettivamente, in $(1, -3)$). I valori minimo e massimo di f in Q sono appunto 0 e $\log 3$.