. . . .

Cognome e nome matricola Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II CALCOLO 2A 4 aprile 2007

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Si studi il carattere delle seguenti serie

$$\text{(A)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{n^2+n} \qquad \text{(B)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} \qquad \text{(C)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n^2+2}}\,.$$

SOLUZIONE.

(A) La serie converge assolutamente: infatti

$$\left|\frac{\sin 2^n}{n^2+n}\right| \le \frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2}$$

e l'ultima quantità è il termine generale di una serie convergente.

(B) La serie è a termini positivi, quindi possiamo applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^3}}{\dfrac{3^n}{n^3}} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 :$$

poiché l'ultimo membro tende a 3, la serie diverge.

(C) Si ha $\cos(\pi n) = (-1)^n$, quindi la serie è a termini di segno alterno: le ipotesi del teorema di Leibniz sono evidentemente soddisfatte, quindi la serie converge (non assolutamente).

---

2. Si dica se converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(1+x)^{1+1/x}}{x^3+1}\,dx$.

SOLUZIONE. L'integrando si può scrivere come segue

$$\frac{(1+x)^{1+1/x}}{x^3+1} = \frac{1+x}{x^3+1}(1+x)^{1/x} :$$

ricordando uno dei limiti notevoli, il limite per $x \to +\infty$ di $(1+x)^{1/x}$ vale e, pertanto l'integrando è asintotico a e/x^2, quindi l'integrale converge per il criterio del confronto.

---

3. Si consideri la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) = xye^{x-y}.$$

a) Si determini e si disegni nel piano l'insieme di livello 0 di f. Si determinino gli insiemi $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ f(x,y) < 0\}$ e $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ f(x,y) > 0\}$ e li si rappresenti nel piano.

b) Si dica se f è limitata.

c) Si dica se la funzione f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.

d) Si calcoli il gradiente di f in tutti i punti di differenziabilità. Si determinino gli eventuali punti stazionari di f e li si rappresenti nel piano.

e) Si studino gli eventuali punti stazionari trovati al punto precedente.

f) Si dica se f ha massimo e/o minimo assoluto nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -2 \le x \le 0,\ x \le y \le -x\}$. Nel caso esistano li si determini.

SOLUZIONE.

a) L'insieme di annullamento di f è costituito dagli assi. L'insieme N è costituito dall'unione del secondo e del quarto quadrante aperti; l'insieme P è costituito dall'unione del primo e del terzo quadrante aperti.

b) La funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente, infatti la sua restrizione alla retta $y = x$ è la funzione x^2, che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, mentre la restrizione alla retta $x = 11$ è la funzione ye^{1-y}, che tende a $-\infty$ per $y \to -\infty$.

c) La funzione è derivabile parzialmente ovunque e ha derivate continue, quindi è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.

d) Il gradiente è dato da $\nabla f(x, y) = e^{x-y}(y(1 + x), (x(1 - y))$. I punti stazionari, ossia quelli che annullano entrambe le derivate parziali, sono due: $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (-1, 1)$.

e) Il punto P_0 non è né di massimo né di minimo locale, infatti P_0 è di accumulazione per entrambi gli insiemi N e P di cui al punto a), dunque in ogni intorno di P_0 si trovano sia elementi in cui $f < 0$ che elementi in cui $f > 0$. Per quanto riguarda il punto P_1, calcoliamo le derivate seconde

$$f_{xx}(x, y) = e^{x-y}y(2 + x), \qquad f_{yy}(x, y) = e^{x-y}x(y - 2), \qquad f_{xy}(x, y) = e^{x-y}(1 - y)(1 + x),$$

quindi la matrice hessiana in P_1 risulta essere la seguente

$$\begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}, \qquad \text{definita positiva}$$

e P_1 è un punto di minimo locale.

f) La funzione f è continua e D è compatto, quindi f ammette massimo e minimo assoluto in D. Occorre studiare il comportamento di f lungo il bordo di D:

$$f\Big|_{\{(-2,y):\ -2\le y\le 2\}} = -2ye^{-2-y}, \qquad f\Big|_{\{(x,y):\ -2\le x\le 0,\ y=-x\}} = -x^2e^{2x}, \qquad f\Big|_{\{(x,y):\ -2\le x\le 0,\ y=x\}} = x^2.$$

Dette, nell'ordine, $f_1(y)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ le tre restrizioni, si verifica facilmente che, negli intervalli considerati, le tre funzioni hanno
f_1 : un minimo locale in $y = 1$, un massimo locale in $y = \pm 2$;
f_2 : un minimo locale in $x = -1$, un massimo locale in $x = -2$ e in $x = 0$;
f_3 : un minimo locale in $x = 0$, un massimo locale in $x = -2$.
Ora basta confrontare i valori assunti da f nei punti trovati:

$$\begin{array}{lll} f_1(-2) = f(-2, -2) = 4, & f_1(1) = f(-2, 1) = -2e^{-3}, & f_1(2) = f(-2, 2) = -4e^{-4}, \\ f_2(-2) = f(-2, 2) = -4e^{-4}, & f_2(-1) = f(-1, 1) = -e^{-2}, & f_2(0) = f(0, 0) = 0, \\ f_3(-2) = f(-2, -2) = 4, & f_3(0) = f(0, 0) = 0. & \end{array}$$

Ne segue che il valore maggiore tra tutti è ottenuto in $(-2, -2)$ ed è 4; il valore minore tra tutti è ottenuto in $(-1, 1)$ ed è $-e^{-2}$. Quelli trovati sono rispettivamente il massimo e il minimo assoluto di f in D.