Prova scritta di Calcolo IIa. Alessandria, 3 luglio 2008

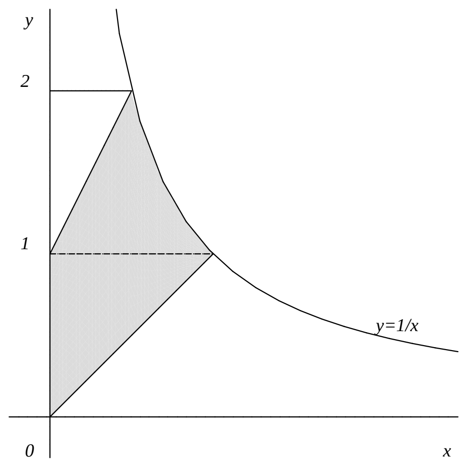
....

Cognome e nome   Firma   Corso di laurea

1. a. Si studi la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx.$$
   b. Si studi la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx.$$
   (Si sfrutti il punto [a.] con un cambio di variabile)
   c. Si studi la convegenza dell'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\, dx.$$

2. Si consideri la funzione definita da
$$f(x,y) := \log(1+xy).$$
   a. Determinare l'insieme di definizione di f e rappresentarlo graficamente.
   b. Dire se f è differenziabile. In caso affermativo calcolarne il differenziale.
   c. Determinare le curve di livello di f e rappresentarle graficamente.
   d. Dire se f ammette massimi e/o minimi assoluti.
   e. Dire se esistono i massimi e minimi di f sugli insiemi
$$A := [0,1] \times [0,1],$$
$$B := [-1/2, 0] \times [0, 1/2],$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1/9\}.$$
   In caso affermativo determinarli.

3. a. Calcolare
$$\int\int_E 2y\,dxdy,$$
dove l'insieme E è costituito dalla zona in grigio nella figura.



b. Determinare l'area del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, limitato, il cui contorno è costituito dalle curve di equazione
$$y = x^3, \qquad y = x^2 + \frac{3}{4}x.$$

Soluzioni

1. a. Fissato $b > 1$, integrando per parti si ha
$$\int_1^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\Big|_1^b + \int_1^b \frac{\cos x}{2x^{3/2}}\,dx.$$
Siccome $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{2x^{3/2}}\,dx$ converge assolutamente si ha che il limite $\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\cos x}{2x^{3/2}}\,dx$ esiste finito. Siccome anche $\lim_{b\to+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\big|_1^b$ esiste finito, possiamo concludere che l'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$
è convergente.

b. Con il cambio di variabile $y = x^2$ si ha

$$\int_0^b \sin x^2\, dx = \int_0^{b^2} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\, dy.$$

Per il punto [a.] dell'esercizio possiamo concludere che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx$$

è convergente, in quanto $\int_0^1 \sin x^2\, dx$ è ovviamente definito.

c. Ancora con il cambio di variabile $y = x^2$ si ha

$$\int_0^b \frac{\sin x^2}{x}\, dx = \int_0^{b^2} \frac{\sin y}{2y}\, dy.$$

La convegenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{2y}\, dy$$

si prova integrando per parti con lo stesso ragionamento usato per il punto [a.] dell'esercizio.

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y) := \log(1 + xy).$$

a. L'insieme di definizione di f è $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$.

b. f è differenziabile in quanto le derivate parziali sono continue in tutto l'insieme di definizione di f. Il differenziale di f è dato da

$$df = \frac{y}{1 + xy} dx + \frac{x}{1 + xy} dy.$$

c. La curva di livello 0 è costituita dagli assi, mentre le curve di livello $k \neq 0$ sono costituite dalle iperboli di equazione $y = \frac{e^k - 1}{x}$.

d. f non ammette né massimi né minimi assoluti in quanto non è limitata inferiormente e superiormente. Difatti se si considera la restrizione alla retta di equazione $y = x$ si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x, x) = \lim_{x \to +\infty} \log(1+x^2) = +\infty$ mentre se si considera la restrizione alla retta di equazione $y = -x$ si ha $\lim_{x \to 1^-} f(x, -x) = \lim_{x \to 1^-} \log(1-x^2) = -\infty$.

e. I massimi e i minimi di f sugli insiemi A, B, C esistono in quanto f è continua e A, B, C sono tutti compatti.
Si verifica senza difficltà che l'origine è l'unico punto stazionario di f ed è un punto di sella.
Dall'analisi dell'andamento delle curve di livello si vede che nell'insieme A un minimo è per esempio in $(0,0)$ mentre l'unico massimo è in $(1,1)$. Analogamente, nell'insieme B un massimo è per esempio in $(0,0)$ mentre l'unico minimo è in $(-1/2, 1/2)$. Per quanto riguarda C, abbiamo già notato che $(0,0)$ è un punto di sella e sempre dall'analisi delle curve di livello si vede che ci sono due massimi che sono $(\pm 1/(2\sqrt{3}), \pm 1/(2\sqrt{3}))$ e due minimi che sono $(\pm 1/(2\sqrt{3}), \mp 1/(2\sqrt{3}))$.

3. a. Si può dividere l'insieme E nei due sottoinsiemi disgiunti

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1/2, x \leq y \leq 2x+1\}$$

e

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1/x\}.$$

Quindi si ha

$$\int\int_E 2y\,dxdy = \int\int_A 2y\,dxdy + \int\int_B 2y\,dxdy.$$

Siccome A e B sono domini normali, per la formula di riduzione

$$\begin{aligned}
&\int\int_A 2y\,dxdy + \int\int_B 2y\,dxdy \\
&= \int_0^{1/2} \Big(\int_x^{2x+1} 2ydy \Big) dx + \int_{1/2}^1 \Big(\int_x^{1/x} 2ydy \Big) dx \\
&= \int_0^{1/2} y^2|_x^{2x+1} dx + \int_{1/2}^1 y^2|_x^{1/x} dx \\
&= \int_0^{1/2} ((2x+1)^2 - x^2) dx + \int_{1/2}^1 (1/x^2 - x^2) dx.
\end{aligned}$$

Calcolando gli ultimi due integrali di una variabile e svolgendo i conti si trova infine

$$\int\int_E 2y\,dxdy = \frac{11}{6}.$$

b. L'insieme di cui determinare l'area è rappresentato in grigio nella figura sottostante. Con un semplice calcolo si trova che i punti di intersezione delle due curve hanno ascissa $x = -1/2$, $x = 0$, $x = 3/2$. Disegnando le due curve nel piano si vede che la parte del piano compresa tra le due curve e limitata ha come proiezione sull'asse delle ascisse l'intervallo $[-1/2, 3/2]$. L'area A dell'insieme è data dall'integrale della funzione caratteristica sullo stesso insieme. Quindi

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1/2}^{0} \int_{x^2+3/4x}^{x^3} dydx + \int_{0}^{3/2} \int_{x^3}^{x^2+3/4x} dydx \\ &= \int_{-1/2}^{0} [x^3 - (x^2 + 3/4x)]dx + \int_{0}^{3/2} [x^2 + 3/4x - x^3]dx. \end{aligned}$$

Calcolando gli ultimi due integrali di una variabile e svolgendo i conti si trova infine

$$A = \frac{11}{16}.$$