Prova scritta di Calcolo IIa. Alessandria, 30 luglio 2008

....

Cognome e nome | Firma | Corso di laurea

1. a. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{\log(1+x^\alpha)}\, dx.$$

   b. Studiare la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \sin(1/x^2)\, dx.$$

2. Si consideri la funzione definita da
$$f(x,y) := \frac{\frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

   a. Calcolare, se esiste, il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

   b. Determinare l'insieme di definizione D di f e dire se f è continua in D. Dire se f si può prolungare ad una funzione continua definita sulla chiusura di D.

   c. Determinare gli insiemi di livello di f e rappresentarli graficamente.

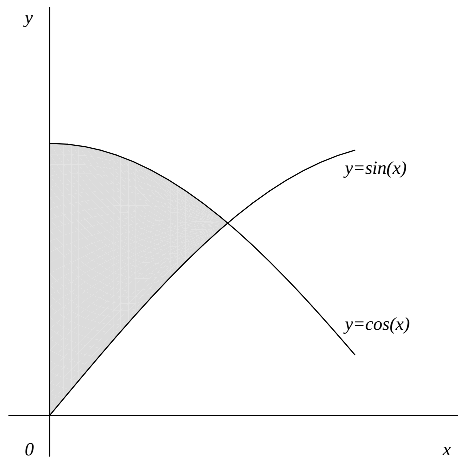
   d. Sia $(x_0, y_0) \in D$ e (v_1, v_2) un vettore di lunghezza 1. Dire se esiste la derivata di f nella direzione (v_1, v_2). In caso affermativo calcolarla.

   e. Dire se esistono i massimi e/o i minimi di f sull'insieme
$$A := \{(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
   In caso affermativo determinarli.

3. a. Calcolare

$$\int\int_E x\,dxdy,$$

dove l'insieme E è costituito dalla zona in grigio nella figura.



b. Determinare l'area del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, compatto, contenuto nel primo quadrante, delimitato dai grafici delle funzioni $f(x) = e^x$, $g(y) = y$, $h(x) = e/x$.

Soluzioni

1. a. Evidentemente, l'integrale converge per $\alpha = 0$. Se $\alpha > 0$, allora l'integrando costituisce una forma indeterminata per $x \to 0$, a proposito della quale, grazie alla formula di Taylor, si ha che

$$\arctan x = x + f_1(x), \qquad \log(1 + x^\alpha) = x^\alpha + f_2(x),$$

dove f_1 è un infinitesimo di ordine superiore a x e f_2 è un infinitesimo di ordine superiore a x^α. Pertanto

$$\frac{\arctan x}{\log(1+x^\alpha)} = \frac{x + f_1(x)}{x^\alpha + f_2(x)} = \frac{x}{x^\alpha}\frac{1 + (f_1(x))/x}{1 + (f_2(x))/x^\alpha} \ :$$

di conseguenza, la funzione integranda è uguale a $x^{1-\alpha}$ moltiplicata per una frazione il cui limite per $x \to 0$ vale 1, quindi il comportamento asintotico della funzione integranda è lo stesso di quello della funzione $x^{1-\alpha}$. Grazie al teorema del confronto asintotico, si conclude che l'integrale improprio converge se e solo se $1-\alpha > -1$, ossia $\alpha < 2$.

b. Per $x \to +\infty$ l'integrando in valore assoluto è un infinitesimo dello stesso ordine di x^{-2} (ciò segue dal calcolo del limite notevole $(\sin y)/y$ per $y \to 0$), pertanto per il teorema del confronto asintotico l'integrale converge assolutamente.

2. La funzione assegnata può essere riscritta come segue

$$f(x,y) := \frac{\frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-\frac{3}{4}x^2-1}{x^2+y^2} = 1 - \frac{\frac{3}{4}x^2+1}{x^2+y^2}\,.$$

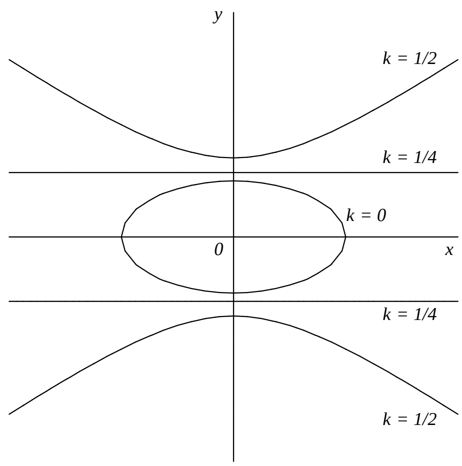
a. Evidentemente, il limite richiesto vale $-\infty$.

b. L'insieme di definizione D di f è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$. La funzione è continua in D in quanto quoziente di funzioni continue, con divisore sempre diverso da 0. Non esiste prolungamento continuo a $\overline{D}$ perché (per il punto precedente) il limite non è finito.

c. L'insieme di livello $k \in \mathbb{R}$ è costituito da tutti e soli quegli elementi (x,y) di D che verificano l'equazione

$$\frac{\frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1}{x^2+y^2} = k, \qquad \text{ossia} \qquad \left(\frac{1}{4} - k\right)x^2 + (1-k)y^2 = 1.$$

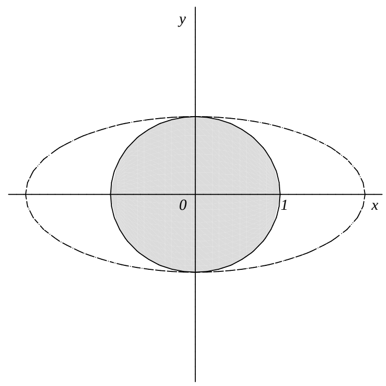
Con riferimento alla seconda uguaglianza, se $k \geq 1$ allora il primo membro è non positivo, dunque l'equazione non ha soluzione; se $1/4 < k < 1$, allora i coefficienti di x^2 e di y_2 sono discordi, quindi siamo in presenza di una iperbole del tipo in figura; se $k = 1/4$, allora l'uguaglianza equivale a $y^2 = 4/3$, che è soddisfatta da tutti e soli i punti appartenenti alle due rette $y = 2/\sqrt{3}$ e $y = -2/\sqrt{3}$; se $k < 1/4$, allora i coefficienti di x^2 e di y_2 sono entrambi positivi e siamo in presenza di una ellissi (v. figura).



d. f è differenziabile, quindi derivabile direzionalmente, in D in quanto le sue derivate parziali sono continue in D. Per la formula del gradiente si ha

$$\frac{\partial f}{\partial(v_1, v_2)}(x_0, y_0) = \frac{-\frac{3}{2}x_0 y_0^2 + 2x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}\, v_1 + \frac{\frac{3}{2}x_0^2 y_0 + 2y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}\, v_2.$$

e. L'esistenza di un punto di massimo assoluto di f sull'insieme A non è garantita dal teorema di Weierstrass in quanto f è continua e A è limitato ma non chiuso. Sicuramente non esiste minimo assoluto, poiché f è illimitata inferiormente grazie al punto a. Ora, l'esame delle curve di livello mostra che quella corrispondente a $k = 0$ è una ellissi (tratteggiata nella figura qui sotto) che tocca la circonferenza $x^2+y^2 = 1$ nei punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$, mentre le curve di livello con $k < 0$ sono ellissi concentriche a questa con semiassi che diminuiscono al diminuire di k, pertanto i valori assunti da f nell'insieme A (che nella figura è in grigio) sono $\leq k$. Si conclude che il valore massimo di f in A è proprio 0 ed è raggiunto in corrispondenza dei punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$.



3. a. Si ha

$$\int\int_E x\,dxdy = \int_0^{\pi/4}\Big(\int_{\sin x}^{\cos x} xdy\Big)dx = \int_0^{\pi/4}(x\cos x - x\sin x)dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - 1.$$

b. L'insieme di cui determinare l'area è rappresentato in grigio nella figura sottostante, dove si è posto $a = \sqrt{e}$. Si osservi che il punto di intersezione tra l'esponenziale e l'iperbole ha ascissa $x = 1$. L'area A dell'insieme è data dall'integrale della funzione caratteristica sullo stesso insieme. Quindi

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1\int_x^{e^x} dydx + \int_1^{\sqrt{e}}\int_x^{e/x} dydx \\ &= \int_0^1 (e^x - x)dx + \int_1^{\sqrt{e}} (e/x\ - x)dx = e - 1. \end{aligned}$$