

Prova scritta di Calcolo IIa. Alessandria, 10 settembre 2008

Cognome e nome

Firma

Corso di laurea

1. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} x e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

e calcolarlo.

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y) := \arctan(x + y^2).$$

- Dato $\beta \in \mathbb{R}$, dire se esiste il $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(\beta y^2, y)$ e, in caso affermativo, calcolarlo.
- Determinare gli insiemi di livello k , al variare di $k \in \mathbb{R}$, di f e rappresentarli graficamente.
- Dire se esistono i massimi e/o i minimi di f sull'insieme

$$A := [-1, 1] \times [-1, 1].$$

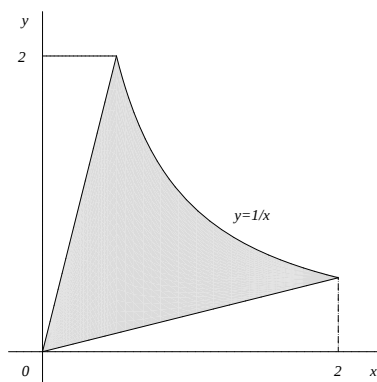
In caso affermativo determinarli.

- d. Dire se esistono i massimi e/o i minimi di f sull'insieme

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

In caso affermativo determinarli.

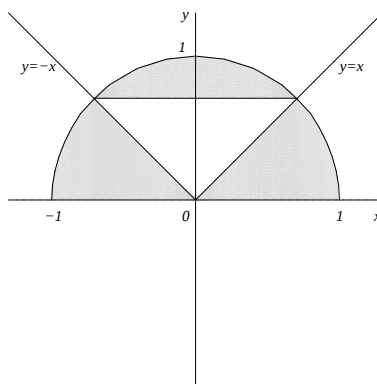
3. a. Calcolare l'area dell'insieme costituito dalla zona in grigio nella figura.



b. Calcolare

$$\int \int_D y \, dx \, dy,$$

dove l'insieme D è costituito dalla zona in grigio nella figura (la linea curva è un arco di circonferenza di centro l'origine).



SOLUZIONE

1. Per definizione,

$$\int_1^{+\infty} x e^{-\alpha^2 x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x e^{-\alpha^2 x^2} dx,$$

se questo limite esiste finito. Si vede subito che se $\alpha = 0$ allora il limite vale $+\infty$, quindi l'integrale improprio diverge. Se $\alpha \neq 0$, allora

applicando la sostituzione $y = -\alpha^2 x^2$, da cui $x \, dx = -1/(2\alpha^2) \, dy$, si ha

$$\int_1^b x e^{-\alpha^2 x^2} \, dx = -\frac{1}{2\alpha^2} \int_{-\alpha^2}^{-\alpha^2 b^2} e^y \, dy = -\frac{1}{2\alpha^2} e^y \Big|_{-\alpha^2}^{-\alpha^2 b^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} (e^{-\alpha^2 b^2} - e^{-\alpha^2}),$$

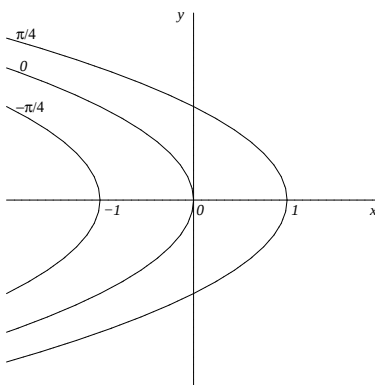
il cui limite per $b \rightarrow +\infty$ esiste finito per ogni $\alpha \neq 0$ e vale $e^{-\alpha^2}/(2\alpha^2)$: questo è il valore dell'integrale improprio (che converge).

2. a. Si ha

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(\beta y^2, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan[(\beta + 1)y^2] :$$

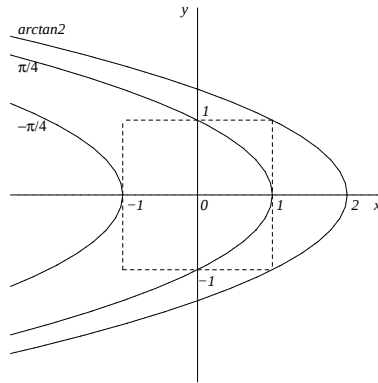
evidentemente, se $\beta + 1 = 0$ (ossia $\beta = -1$) allora il limite vale 0; se $\beta + 1 > 0$ (ossia $\beta > -1$) allora il limite vale $\pi/2$; se $\beta + 1 < 0$ (ossia $\beta < -1$) allora il limite vale $-\pi/2$.

b. L'insieme di livello $k \in \mathbb{R}$ è costituito da tutti e soli quegli elementi (x, y) appartenenti al dominio di f (nel nostro caso, tutto $\mathbb{R}^2$) che verificano l'equazione $\arctan(x+y^2) = k$: ciò comporta intanto che k debba verificare le disuguaglianze $-\pi/2 < k < \pi/2$ e quindi gli elementi dell'insieme di livello k soddisfano $x + y^2 = \tan k$, ovvero $x = -y^2 + \tan k$. Si tratta dunque di una parabola avente asse di simmetria coincidente con l'asse x , vertice in $(\tan k, 0)$ e contenuta nel semipiano $\{x \leq \tan k\}$. Nella figura sottostante sono tracciati gli insiemi di livello k per $k = -\pi/4$, $k = 0$ e $k = \pi/4$.



c. L'esistenza di massimo e minimo assoluto di f sull'insieme A è garantita dal teorema di Weierstrass in quanto f è continua e A

è limitato e chiuso, quindi compatto. Ora, l'esame delle curve di livello (v. figura sottostante) mostra che tutte e sole quelle corrispondenti a valori di k compresi tra $-\pi/4$ e $\arctan 2$ intersecano l'insieme A (la curva con $k = \arctan 2$ è stata trovata cercando il valore di k tale che la coppia di punti $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $(x_1, y_1) = (1, -1)$ appartenesse a questa curva, da cui $x_0 + y_0^2 = \tan k$ e $x_1 + y_1^2 = \tan k$: sostituendo i valori di x_0, y_0, x_1 e y_1 , si ottiene proprio $\tan k = 2$). Pertanto, il valore massimo assunto da f in A è $\arctan 2$, ottenuto in corrispondenza di $(1, 1)$ e $(1, -1)$, mentre il valore minimo assunto da f in A è $-\pi/4$, ottenuto in corrispondenza di $(-1, 0)$.



- d. Anche l'esistenza di massimo e minimo assoluto di f sull'insieme B è garantita dal teorema di Weierstrass in quanto f è continua e B è limitato e chiuso, quindi compatto. Anche in questo caso si potrebbe procedere mediante l'esame delle curve di livello, tuttavia per completezza presentiamo una soluzione alternativa, basata sulle proprietà della restrizione di f a B . Preso atto che f non ha punti stazionari (in quanto $f_x(x, y) = [1 + (x + y^2)^2]^{-1}$ non si annulla mai), si deduce che il massimo e il minimo assoluto di f in B devono essere raggiunti in ∂B . Inoltre, grazie alla simmetria di f rispetto all'asse x , è sufficiente esaminare il comportamento della restrizione di f alla semicirconferenza $(\partial B) \cap \{y \geq 0\}$: se denotiamo questa restrizione con g , si ha $g(x, y) = \arctan(x + y^2)$ per (x, y) che ha rappresentazione parametrica $x = t, y = \sqrt{1 - t^2}$, $t \in [-1, 1]$: abbiamo dunque a che fare con la funzione composta

$\phi(t) = g(t, \sqrt{1-t^2}) = \arctan(1+t-t^2)$, $t \in [-1, 1]$. Poiché $\phi'(t) > 0$ se e solo se $1-2t > 0$, si deduce che ϕ cresce in $] -1, 1/2[$ e decresce in $] 1/2, 1[$; pertanto, g assume il suo massimo (assoluto) in $(1/2, \sqrt{1-1/4}) = (1/2, \sqrt{3}/2)$, mentre gli estremi della semicirconferenza $(-1, 0)$ e $(0, 1)$ sono punti di minimo relativo: confrontando i valori assunti, si trova $g(-1, 0) = \arctan(-1) = -\pi/4 < \pi/4 = \arctan 1 = g(1, 0)$, quindi il minimo assoluto di g è raggiunto in $(-1, 0)$. In conclusione, i punti di massimo assoluto per f su B sono $(1/2, \sqrt{3}/2)$ e, per simmetria, $(1/2, -\sqrt{3}/2)$, con valore $\arctan(5/4)$; il punto di minimo assoluto è $(-1, 0)$, con valore $-\pi/4$.

3. a. Si confronti con la figura riportata nel testo. I punti estremi dell'arco di iperbole che delimita l'insieme di cui calcolare l'area hanno coordinate $(1/2, 2)$ e $(2, 1/2)$. Ora, unendo alla zona grigia il triangolo avente come vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(1/2, 2)$ e quello avente come vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(2, 1/2)$, si ottiene un insieme che può essere a sua volta decomposto come l'unione del rettangolo $E_1 = [0, 1/2] \times [0, 2]$ e del sottografico $E_2 = \{(x, y) : 1/2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1/x\}$. Ma l'area di E_1 è esattamente uguale alla somma delle aree dei due triangoli rettangoli di cui sopra, quindi l'area della zona grigia altri non è che l'area di E_2 , pari a

$$\int_{1/2}^2 dx \int_0^{1/x} dy = \int_{1/2}^2 \frac{1}{x} dx = 2 \log 2.$$

- b. Per l'interpretazione geometrica degli integrali doppi, il valore dell'integrale richiesto è pari al volume dell'insieme $E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq y\}$. Per simmetria, questo volume è il doppio di quello dell'insieme $E^+ = \{(x, y, z) : (x, y) \in D^+, 0 \leq z \leq y\}$, dove $D^+ = D \cap \{(x, y) : x \geq 0\}$. Infine, il volume di E^+ è dato da

$$\begin{aligned} \int \int_{D^+} y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy - \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_x^{1/\sqrt{2}} y \, dy = \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} \, dx - \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - x^2\right) \, dx = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

(l'integrale su D^+ è ottenuto sottraendo a quello su tutto il quarto di cerchio l'integrale sul triangolo, bianco nella figura del testo,

avente per vertici i punti $(0, 0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(0, 1/\sqrt{2})$). Ricordando che il valore trovato è solo metà di quello richiesto, si conclude che quest'ultimo è pari a $(2 - 1/\sqrt{2})/3$.