Prova scritta di Calcolo II A. Alessandria, 10 dicembre 2008

....

Cognome e nome Firma Corso di laurea

1. Discutere la convergenza, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, dei due seguenti integrali impropri:

   a.
   $$\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, dx.$$

   b.
   $$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, dx.$$

2. Data la funzione
   $$f(x,y) = \log(x^2 - y) - \log(y+2),$$

   a. Determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo nel piano cartesiano x, y.

   b. Determinare gli insiemi di livello k di f, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e rappresentarli graficamente.

   c. Determinarne le derivate parziali di f del primo e del secondo ordine. Trovare i punti critici di f. Dire se ci possono essere punti di massimo o minimo relativo di f nel suo campo di esistenza.

3. Calcolare la misura dell'insieme $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3$, dove
   $$D_1 = \{(x,y) :\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$
   $$D_2 = \{(x,y) :\ y \leq \frac{8\sqrt{2}}{9\pi^2} x^2\},$$
   $$D_3 = \{(x,y) :\ y \leq \sin x\},$$
   sapendo che l'intersezione tra la parabola di equazione $y = \frac{8\sqrt{2}}{9\pi^2} x^2$ e la curva $y = \sin x$ avviene, per $x > 0$ nel punto di ascissa $x = 3\pi/4$.

Soluzione

1. a. L'integrale converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

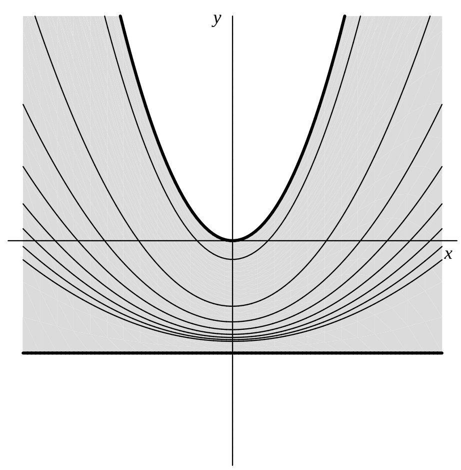
   b. L'integrale converge per ogni $\alpha > -1$.

2. Data la funzione
$$f(x, y) = \log(x^2 - y) - \log(y + 2),$$

   a. La funzione f è definita per le coppie (x, y) tali che $x^2 - y > 0$ e $y + 2 > 0$, quindi il campo di esistenza è dato da $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ -2 < y < x^2\}$.

   b. Le curve di livello sono date dall'equazione $\log(x^2 - y) - \log(y + 2) = K$, al variare di $K \in \mathbb{R}$. Nel campo di esistenza, l'equazione equivale a
$$y = \frac{x^2}{1 + C} - 2\frac{C}{1 + C} \ ,$$
dove si è posto $C = e^K$ (quindi, C è un arbitrario numero reale positivo). Dunque, le curve di livello sono parabole simmetriche rispetto all'asse y, aventi il vertice nel punto di coordinate $(0, -2C/(1 + C))$, tendenti ad appiattirsi sulla retta orizzontale $y = -2$ al tendere di K a $+\infty$ e tendenti alla parabola $y = x^2$ al tendere di K a $-\infty$.

   Nella figura sono riportate alcune linee di livello: sono più marcate le due curve limite (la retta orizzontale $y = -2$ e la parabola $y = x^2$), che costituiscono il bordo di D.



c. Le derivate parziali prime e seconde sono date da

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{2x}{x^2-y}, \quad f_y = -\frac{1}{x^2-y} - \frac{1}{y+2},\\
f_{xx} &= -2\frac{x^2+y}{(x^2-y)^2}, \quad f_{yy} = -\frac{1}{(x^2-y)^2} + \frac{1}{(y+2)^2},\\
f_{xy} &= \frac{2x}{(x^2-y)^2}\ .
\end{aligned}$$

I punti critici sono quelli in cui le derivate parziali prime sono entrambe nulle: nel nostro caso ciò significa risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{2x}{x^2-y} & = 0 \\ -\frac{1}{x^2-y} - \frac{1}{y+2} & = 0 \end{cases}.$$

Dalla prima equazione si ottiene $x = 0$ e quindi la seconda non è mai soddisfatta. Dunque, non esistono punti critici.

Siccome il campo di esistenza di f è aperto e f è differenziabile i punti di massimo o minimo relativo devono essere punti critici. Quindi non possono esserci massimi e minimi relativi.

3. Posto $a = \frac{8\sqrt{2}}{9\pi^2}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
m(D) &= \int_0^{3\pi/4}\int_0^{ax^2} dy\,dx + \int_{3\pi/4}^{\pi}\int_0^{\sin x} dy\,dx\\
&= \int_0^{3\pi/4} ax^2\,dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} \sin x\,dx\\
&= \frac{a}{3}x^3\Big|_0^{3\pi/4} - \cos x\Big|_{3\pi/4}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$