. . . .

Cognome e nome | matricola | Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II | CALCOLO 2A | 9 gennaio 2009

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Discutere la convergenza, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, del seguente integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} (e^{x^\alpha} - 1)\, dx$.

SOLUZIONE. Distinguiamo i tre casi: $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$. Nel primo, l'integrando tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, quindi l'integrale diverge. Nel secondo, l'integrando vale $e-1$, dunque anche in questo caso l'integrale diverge. Nel terzo caso, l'integrando è infinitesimo per $x \to +\infty$ e si può scrivere come segue

$$e^{x^\alpha} - 1 = x^\alpha + g(x),$$

dove g è un infinitesimo di ordine superiore a x^α. Poiché

$$\frac{e^{x^\alpha} - 1}{x^\alpha} = 1 + \frac{g(x)}{x^\alpha} \ \to \ 1 \qquad \text{per} \quad x \to +\infty,$$

per il teorema del confronto si deduce che $e^{x^\alpha} - 1$ è integrabile in senso improprio se e solo se lo è x^α, ossia se e solo se $\alpha < -1$.

---

2. Si consideri la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) = \frac{3x + y}{2x^2 + y + 1} \ .$$

a) Determinare il campo di esistenza D e rappresentarlo nel piano cartesiano x, y.
b) Determinare, se esistonno, i punti stazionari di f.
c) Dire se f ha massimo e/o minimo assoluto nel triangolo chiuso di vertici $(-1,0)$, $(0,0)$ e $(0,1)$. Nel caso esistano determinarli.

SOLUZIONE.
a) Il campo di esistenza D di f è costituito da tutto il piano ad eccezione della parabola di equazione $y = -2x^2 - 1$.
b) Le derivate parziali sono

$$f_x(x,y) = \frac{-6x^2 - 4xy + 3y + 3}{(2x^2 + y + 1)^2} \ , \qquad f_y(x,y) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{(2x^2 + y + 1)^2} \ .$$

I punti stazionari, ossia quelli che annullano entrambe le derivate parziali, sono due: $(1/2, -3/2)$ e $(1, -1)$.
c) La funzione f è continua e il triangolo è compatto, quindi f ammette massimo e minimo assoluto nel triangolo. Poiché non vi sono punti stazionari interni, occorre studiare il comportamento di f lungo il bordo:

$$f\Big|_{\{(x,0):\ -1 \le x \le 0\}} = \frac{3x}{2x^2 + 1}, \qquad f\Big|_{\{(0,y):\ 0 \le y \le 1\}} = \frac{y}{y + 1}, \qquad f\Big|_{\{(x,x+1):\ -1 \le x \le 0\}} = \frac{4x + 1}{2x^2 + x + 2}.$$

Dette, nell'ordine, $f_1(x)$, $f_2(y)$ e $f_3(x)$ le tre restrizioni, effettuando lo studio di ciascuna funzione si verifica che, negli intervalli considerati, le tre funzioni hanno il seguente andamento:
f_1 : decresce in $[-1, -\sqrt{2}/2]$, cresce in $[-\sqrt{2}/2, 0]$, quindi ha il minimo assoluto in $-\sqrt{2}/2$ e due massimi locali in -1 e in 0;
f_2 : cresce in $[0,1]$, quindi ha il minimo assoluto in 0 e il massimo assoluto in 1;
f_3 : cresce in $[-1,0]$, quindi ha il minimo assoluto in -1 e il massimo assoluto in 0.
Ne segue che il valore massimo assoluto di f lungo il bordo del triangolo è ottenuto in $(0,1)$; il valore minimo assoluto è ottenuto in $(-\sqrt{2}/2, 0)$.

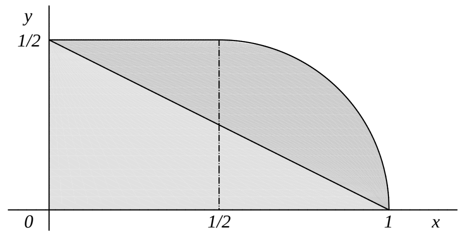
---

3. Siano α e β due numeri reali con $0 < \alpha < 1$ e tali che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \beta, & x \in [0, \alpha] \\ \sqrt{x(1-x)}, & x \in]\alpha, 1] \end{cases}$$

sia di classe $\mathbf{C}^1([0,1])$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione g e la retta passante per i punti $(0, \beta)$ e $(1, g(1))$.

SOLUZIONE.



Qualunque sia β, si ha $g'(\alpha^-) = 0$ e $g'(\alpha^+) = (1-2\alpha)/(2\sqrt{\alpha - \alpha^2})$, quindi g può essere di classe $\mathbf{C}^1([0,1])$ solo se $\alpha = 1/2$. In tal caso, risulta $g(\alpha^+) = 1/2$ e dunque g può essere continua in α solo se $\beta = 1/2$. Si verifica subito che le due condizioni sono non solo necesssarie ma anche sufficienti affinché g sia di classe $\mathbf{C}^1([0,1])$. Dunque, $\alpha = \beta = 1/2$ e la retta passante per i punti $(0, \beta)$ e $(1, g(1))$ ha equazione $y = (1-x)/2$. La parte di piano D compresa tra il grafico della funzione g e la predetta retta (v. figura soprastante, zona più scura) è data dalla differenza $D_2 \backslash D_1$, dove D_2 è il dominio normale rispetto all'asse x, dato da

$$D_2 = \{(x,y): \ 0 \le y \le 1/2, \ 0 \le x \le (1 + \sqrt{1-4y^2})/2\},$$

pertanto la sua area è data da

$$\int_0^{1/2} \left(\int_0^{(1+\sqrt{1-4y^2})/2} dx \right) dy = \int_0^{1/2} (1 + \sqrt{1-4y^2})/2 \, dy =$$

$$= 1/4 \ + \ (1/4) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \ \cos t \, dt = 1/4 \ + \ \pi/16 :$$

nel corso del calcolo si è effettuata la sostituzione $2y = \sin t$. D_1 (grigio chiaro nella figura) è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0, 1/2)$ e $(1, 0)$, la cui area vale $1/4$. Dunque l'area di D vale $\pi/16$.