Prova scritta di Calcolo II B. Alessandria, 10 dicembre 2008

....

Cognome e nome Firma Corso di laurea

1. Calcolare
$$\iint_D e^{\frac{x^2}{4}+y^2}\left|\frac{x^2}{4}+y^2-1\right| dxdy,$$
dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 4y^2 \leq 16\}$.

2. Data la forma differenziale
$$\omega = \frac{x}{x^2 - y - 2}\, dx - \frac{1}{2x^2 - 2y - 4}\, dy,$$
definita in $D = \{(x, y) :\ y > x^2 - 2\}$,

   a. discuterne l'esattezza e in caso positivo trovare una primitiva;

   b. calcolare
$$\int_\phi \omega, \qquad \text{dove} \qquad \phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 + \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [\pi/2, \pi].$$

3. Sapendo che il sostegno della curva
$$\phi(t) = \left(\begin{array}{c} t^2(2\pi^2 - t^2) \\ \sin t \end{array} \right), \qquad t \in [-\pi, \pi]$$
è il bordo di un aperto regolare B, determinare la misura di B [suggerimento: fare attenzione all'orientamento di ∂B].

Soluzione

1. Poniamo
$$I = \iint_D e^{\frac{x^2}{4}+y^2}\left|\frac{x^2}{4}+y^2-1\right| dxdy.$$
D è la regione di piano limitata contenuta nel primo quadrante e delimitata dall'ellisse di semiassi 4 e 2. Il sottoinsieme di D in cui

$\frac{x^2}{4}+y^2-1<0$ è la regione di piano limitata contenuta nel primo quadrante e delimitata dall'ellisse di semiassi 2 e 1. Definendo i sottoinsiemi di D, D_+ e D_- in cui $\frac{x^2}{4}+y^2-1>0$ e $\frac{x^2}{4}+y^2-1<0$ rispettivamente, si ha

$$I=-\iint_{D_-} e^{\frac{x^2}{4}+y^2}\left(\frac{x^2}{4}+y^2-1\right)dxdy+\iint_{D_+} e^{\frac{x^2}{4}+y^2}\left(\frac{x^2}{4}+y^2-1\right)dxdy.$$

Usando la trasformazione polare-ellittica $x=2\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ si ha

$$I=-\int_0^{\pi/2}\int_0^1 e^{\rho^2}(\rho^2-1)2\rho\,d\rho\,d\theta+\int_0^{\pi/2}\int_1^2 e^{\rho^2}(\rho^2-1)2\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Una primitiva di $\rho\mapsto e^{\rho^2}(\rho^2-1)2\rho$ si determina facilmente integrando per parti ed è $\rho\mapsto e^{\rho^2}(\rho^2-2)$. Quindi

$$I=-\frac{\pi}{2}e^{\rho^2}(\rho^2-2)\Big|_0^1+\frac{\pi}{2}e^{\rho^2}(\rho^2-2)\Big|_1^2=\pi(e^4+e-1).$$

2. a. Si verifica immediatamente che ω è chiusa. Siccome D è semplicemente connesso ω è anche esatta. Una primitiva $U:D\to\mathbb{R}$ si può calcolare, per esempio, imponendo le condizioni $U_x(x,y)=\frac{x}{x^2-y-2}$ e $U_y(x,y)=-\frac{1}{2x^2-2y-4}$, da cui si ricava $U(x,y)=\frac{1}{2}\log(y+2-x^2)$ ricordando che in D si ha $x^2-y-2<0$.

   b. Siccome ω è esatta, osservando che la curva ϕ è a valori in D, si ha
$$\int_\phi\omega=U(\phi(\pi))-U(\phi(\pi/2))=-\frac{1}{2}\log 2.$$

3. Osservando che la curva è chiusa ed è orientata in senso orario, applichiamo il teorema della divergenza in B ad un campo vettoriale la cui divergenza sia 1. Possiamo scegliere per esempio il campo $F(x,y)=(x,0)$ (altre scelte sono possibili, tra le tante citiamo $F(x,y)=(0,y)$ oppure $F(x,y)=\frac{1}{2}(x,y)$).

Allora

$$\begin{aligned} m(B) &= \int_B 1\,dx\,dy = \int_{\partial B} F(x,y)\cdot\nu(x,y) \\ &= -\int_\phi x\,dy = -\int_{-\pi}^{\pi} t^2(2\pi^2 - t^2)\cos t\,dt \\ &= -2\pi^2\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos t\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} t^4\cos t\,dt. \end{aligned}$$

Gli ultimi due integrali si calcolano facilmente per parti e si trova che

$$m(B) = 48\pi.$$