. . . .

Cognome e nome | matricola | Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica III | CALCOLO 2B | 9 gennaio 2009

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Calcolare

$$\int\int_D (x+2y^2)\,dxdy,$$

dove D è il cerchio di centro $(1,1)$ e raggio 1.

SOLUZIONE. Passando alle coordinate polari con centro in $(1,1)$, le variabili e il dominio trasformato sono espressi da

$$\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta, \\ y = 1+\rho\sin\theta, \end{cases} \qquad D(\rho,\theta) = \{(\rho,\theta):\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}.$$

Pertanto l'integrale richiesto si calcola come segue

$$\begin{aligned}\int\int_D (x+2y^2)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[1+\rho\cos\theta + 2(1+\rho\sin\theta)^2\right] d\theta\right)\rho\,d\rho = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (3\rho + 2\rho^3\sin^2\theta)\,d\theta\right) d\rho = \int_0^1 (6\pi\rho + 2\pi\rho^3)\,d\rho = \frac{7}{2}\pi.\end{aligned}$$

---

2. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{\sqrt{x^3}}\,dx - 2\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dy,$$

calcolare gli integrali

$$\int_\phi \omega \qquad \text{e} \qquad \int_{\phi-\psi}\omega,$$

dove ϕ e ψ sono le seguenti curve definite per $t\in[1,3]$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-(t-2)^2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \psi(t) = \begin{pmatrix} t \\ (t-2)^2-1 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE. Il calcolo può anche essere svolto direttamente, tuttavia è più semplice percorrere la strada seguente. La forma differenziale è definita nel semipiano aperto $E=\{(x,y):\ x>0\}$: si verifica facilmente che la forma è chiusa, dunque esatta dato che E è stellato. Sia F una primitiva: allora $F_y(x,y) = -2(1+1/\sqrt{x})$, quindi $F(x,y) = -2y(1+1/\sqrt{x})+h(x)$, dove h è una funzione derivabile della sola variabile x. Dunque $F_x(x,y) = y/\sqrt{x^3}+h'(x)$: per confronto con il primo coefficinte della forma, risulta $h'(x)=0$ per ogni x, quindi h è una costante e una primitiva è ad esempio $F(x,y) = -2y(1+1/\sqrt{x})$.

Per un noto risultato, siccome ω è una forma differenziale esatta a coefficienti continui, il suo integrale lungo una curva regolare a tratti a valori in E è dato dalla differenza dei valori di F agli estremi: poiché gli estremi di ϕ sono, nell'ordine, $(1,0)$ e $(3,0)$, si ha

$$\int_\phi \omega = F(3,0)-F(1,0) = 0.$$

Per lo stesso motivo, osservato che $\phi-\psi$ è una curva regolare a tratti a valori in E e chiusa, l'integrale curvilineo di ω lungo $\phi-\psi$ è nullo.

---

3. Data la funzione reale $f(x,y) = y^2 - x(1-x^2)$, definita in $A=\{(x,y):\ -1/2<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$,

(a) verificare che l'insieme $B=\{(x,y)\in A:\ f(x,y)<0\}$ è un aperto regolare;

(b) calcolare l'integrale di linea

$$\int_{\partial B} \mathbf{w}\cdot\tilde{\nu}\,ds, \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{w}(x,y) = \begin{pmatrix} x-x^3 \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad (x,y)\in A$$

e $\tilde{\nu}$ è il versore normale uscente da ∂B.

SOLUZIONE.

(a) La funzione f è un polinomio, quindi di classe $\mathbf{C}^1(A)$, e B è il suo insieme di negatività. Per continuità (e per il teorema di permanenza del segno) ∂B è l'insieme di annullamento di f. Le derivate parziali $f_x = 3x^2 - 1$ e $f_y = 2y$ si annullano contemporaneamente nei punti $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$, che non appartengono a ∂B, dunque B è un aperto regolare.

(b) Per il teorema di Gauss, l'integrale richiesto è pari all'integrale della divergenza di $\mathbf{w}$ in B, che si calcola come segue, avendo osservato che l'equazione $f(x,y) = 0$ è risolta, in A, da tutti e soli i punti che appartengono al grafico delle due funzioni $\pm\sqrt{x - x^3}$, $x \in [0,1]$:

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{w}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x-x^3}}^{\sqrt{x-x^3}} \big[(1-3x^2) + 2y\big]\, dy \right) dx =$$

$$= 2 \int_0^1 (1-3x^2)\sqrt{x - x^3}\, dx = (4/3)\sqrt{(x-x^3)^3}\,\Bigg|_0^1 = 0.$$