. . . .

Cognome e nome matricola firma

CALCOLO III 19 marzo 2004

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$u_n(x) = \frac{1}{x+n}\,, \qquad n \geq 1,$$

nella semiretta $]0, +\infty[$.
SOLUZIONE. La successione tende puntualmente alla funzione identicamente nulla. La successione è anche uniforme poiché

$$\sup\ \{|u_n(x) - 0|,\ x \in]0, +\infty[\} = \frac{1}{n}\,,$$

che tende a 0 per $n \to +\infty$.

---

2. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^n.$$

SOLUZIONE. Posto $y = x - 3$, la prima serie è una serie di potenze nella variabile y, il cui raggio di convergenza è dato dal reciproco di

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n5^n}} = \frac{1}{5}\,.$$

Pertanto,la serie converge per ogni y con $|y| < 5$, ossia per ogni $x \in] - 2, 8[$. Per $x = 8$ la serie si riduce alla serie armonica, quindi diverge; per $x = -2$ la serie coincide con la serie armonica a termini alterni, che converge per il criterio di Leibniz. Per $x < -2$ e per $x > 8$ la serie non converge.
La seconda serie è una serie geometrica di ragione $(x+2)/(x^2+1)$, dunque converge se e solo se la ragione è minore di 1 in valore assoluto, ossia se e solo se $x < (1/2)(1-\sqrt{5})$ o $x > (1/2)(1+\sqrt{5})$.

---

3. Rappresentare con una serie di potenze l'integrale

$$\int_0^{0.2} \frac{1}{1+x^5}\, dx.$$

Che errore si commette se si approssima il valore dell'integrale con la somma dei primi due termini della serie?
SOLUZIONE. L'integrando può essere visto come la somma della serie geometrica di ragione $-x^5$, che ha raggio di convergenza 1. In particolare, si può integrare per serie nell'intervallo $[0, 0.2]$ e si ottiene

$$\int_0^{0.2} \frac{1}{1+x^5}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{0.2} (-x)^{5n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{0.2} x^{5n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{5n+1}}{5n+1}\right]_0^{0.2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(5n+1)5^{5n+1}}\,.$$

Osservato che l'ultima serie è a termini alterni, il criterio di Leibniz asserisce che l'errore commesso sostituendo la somma della serie con la somma dei primi due termini è maggiorato dal valore assoluto del primo termine trascurato, ossia $1/(11\ 5^{11}$.

---

4. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+\pi, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

prolungata periodicamente a $\mathbb{R}$.
SOLUZIONE. Per definizione, i coefficienti della serie di Fourier

$$c_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}},$$

di f sono dati da

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx, \qquad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\, dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$c_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\sqrt{\pi}. \qquad a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi} n^2}, \qquad b_n = -\frac{\sqrt{\pi}}{n},$$

quindi la serie di Fourier di f è la seguente

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}}{\pi n^2} \cos(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

---

5. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale del primo ordine

$$y'(x) + y(x)\cos x = \sin(2x).$$

SOLUZIONE. L'equazione è lineare e non omogenea; l'omogena associata è $y'(x) + y(x)\cos x = 0$, che è a variabili separabili e ha come soluzione generale $y_0(x) = C\ e^{-\sin x}$, $C \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione di partenza avrà la forma $\overline{y}(x) = v(x)\ e^{-\sin x}$, con v funzione da determinare: imponendo che $\overline{y}$ sia una soluzione particolare si trova

$$\overline{y}'(x) + \overline{y}(x)\cos x = \sin(2x), \qquad \text{ossia} \qquad v'(x)\ e^{-\sin x} - v(x)\cos x\ e^{-\sin x} + v(x)\ e^{-\sin x}\cos x = \sin(2x):$$

semplificando, deve valere l'equazione

$$v'(x)\ e^{-\sin x} = \sin(2x), \qquad \text{da cui} \qquad v(x) = 2\int \sin x \cos x\ e^{\sin x} dx.$$

L'ultimo integrale si risolve ponendo $z = \sin x$, da cui $dz = \cos x\ dx$, quindi

$$v(x) = 2\int z e^z dz = 2ze^z - 2e^z + K = 2\sin x\ e^{\sin x} - 2\ e^{\sin x} + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

quindi

$$\overline{y}(x) = 2\sin x - 2 + K\ e^{-\sin x}.$$

Da $y(x) = y_0 + \overline{y}$ (inglobando la costante K nella costante C) si ottiene infine

$$y(x) = Ce^{-\sin x} + 2\sin x - 2.$$

---

6. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 2x + 1 \\ y(0) = \dfrac{7}{8} \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE. L'equazione differenziale è del secondo ordine, lineare e non omogenea. Per determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 0$, si considera l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 4$. Corrispondentemente, due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{4x}$. Visto il termine non omogeneo, una soluzione particolare dell'equazione iniziale sarà della forma $\overline{y}(x) = ax+b$: inserendo $\overline{y}(x)$ e le sue derivate prima e seconda nell'equazione differenziale, si ottiene l'identità $-5a + 4ax + 4b = 2x + 1$, da cui per il principio di identità dei polinomi, $a = 1/2$ e $b = 7/8$. Ne segue che $\overline{y}(x) = (1/2)x + (7/8)$ e dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + \frac{1}{2}\,x + \frac{7}{8}\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + \dfrac{7}{8} = \dfrac{7}{8} \\ y'(0) = C_1 + 4C_2 + \dfrac{1}{2} \ = 0, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{6} \\ C_2 = -\dfrac{1}{6}\,, \end{cases}$$

quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{6}\,e^x - \frac{1}{6}\,e^{4x} + \frac{1}{2}\,x + \frac{7}{8}\,.$$