....

Cognome e nome matricola firma

CALCOLO III 2 aprile 2004

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$u_n(x) = x^n \ , \qquad n \geq 1,$$

nell'intervallo $[0, 1/2]$.

SOLUZIONE. La successione tende puntualmente alla funzione identicamente nulla. La successione è anche uniforme poiché

$$\sup \ \{|u_n(x) - 0|,\ x \in [0, 1/2]\} = \frac{1}{2^n} \ ,$$

che tende a 0 per $n \to +\infty$.

---

2. Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n\, x^n}{(n+1)^2} \ .$$

SOLUZIONE. Si tratta di una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è dato dal reciproco di

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{(n+1)^2}} = 3 \ .$$

Pertanto,la serie converge per ogni x con $|x| < 1/3$. Per $|x| = 1/3$ la serie converge assolutamente, poiché il termine generale (in valore assoluto) è dato da $1/(n+1)^2$.

---

3. Rappresentare con una serie di potenze l'integrale

$$\int_0^1 \cos(x^2)\ dx.$$

SOLUZIONE. L'integrando può essere visto come somma della serie (di Taylor del coseno)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1^n) \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!}$$

(che ha raggio di convergenza infinito). Pertanto in $[0, 1]$ si ha convergenza uniforme ed è possibile integrare per serie:

$$\int_0^1 \cos(x^2)\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1^n) \frac{x^{4n}}{(2n)!}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(4n+1)(2n)!} \ .$$

---

4. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

prolungata periodicamente a $\mathbb{R}$.
SOLUZIONE. Per definizione, i coefficienti della serie di Fourier

$$c_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}},$$

di f sono dati da

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx, \qquad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\, dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$c_0 = -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\sqrt{\pi}. \qquad a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi}n^2}, \qquad b_n = -\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}}{n},$$

quindi la serie di Fourier di f è la seguente

$$-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}}{\pi n^2} \cos(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

---

5. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale del primo ordine

$$y'(x) - xy(x) = x^3.$$

SOLUZIONE. L'equazione è lineare e non omogenea; l'omogena associata è $y'(x) - xy(x) = 0$, che è a variabili separabili e ha come soluzione generale $y_0(x) = C\, e^{x^2/2}$, $C \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione di partenza avrà la forma $\overline{y}(x) = v(x)\, e^{x^2/2}$, con v funzione da determinare: imponendo che $\overline{y}$ sia una soluzione particolare si trova

$$\overline{y}'(x) - x\overline{y}(x) = x^3, \qquad \text{ossia} \qquad v'(x)\, e^{x^2/2} + xv(x); e^{x^2/2} - xv(x)\, e^{x^2/2} = x^3 :$$

semplificando, deve valere l'equazione

$$v'(x)\, e^{x^2/2} = x^3, \qquad \text{da cui} \qquad v(x) = \int x^3\, e^{-x^2/2} dx.$$

L'ultimo integrale si risolve per parti decomponendo l'integrando nei due fattori $x^2[x\, e^{-x^2/2}]$:

$$v(x) = -x^2\, e^{-x^2/2} + 2\int x\, e^{-x^2/2} dx = -x^2\, e^{-x^2/2} - 2e^{-x^2/2} + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

quindi

$$\overline{y}(x) = -x^2 - 2 + K\, e^{x^2/2}.$$

Da $y(x) = y_0 + \overline{y}$ (inglobando la costante K nella costante C) si ottiene infine

$$y(x) = Ce^{x^2/2} - x^2 - 2.$$

---

6. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale del secondo ordine

$$y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = e^{4x}$$

SOLUZIONE. L'equazione differenziale è del secondo ordine, lineare e non omogenea. Per determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = 0$, si considera l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, le cui soluzioni sono reali e coincidenti $\lambda = 4$. Corrispondentemente, due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono $y_1(x) = e^{4x}$ e $y_2(x) = xe^{4x}$. Visto il termine non omogeneo, una soluzione particolare dell'equazione iniziale sarà data dal prodotto tra il secondo membro e un polinomio di grado non inferiore a 2 (poiché un polinomio di primo grado ridarebbe una soluzione dell'equazione omogenea). Tentiamo con $\overline{y}(x) = ax^2e^{4x}$: inserendo $\overline{y}(x)$ e le sue derivate prima e seconda nell'equazione differenziale, si ottiene $a = 1/2$. Ne segue che $\overline{y}(x) = (1/2)x^2e^{4x}$ e dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x} + \frac{1}{2}\, x^2e^{4x}.$$