- Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
 2. Consegnare ANCHE questo foglio.
 3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
 4. Tempo a disposizione: 120 min.

1. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}.$$

SOLUZIONE. Data la serie di potenze $\sum a_n x^n$, il raggio di convergenza è dato dal reciproco di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

se questo esiste (con la solita convenzione nel caso in cui esso valga 0 oppure $+\infty$). Pertanto, entrambe le serie hanno raggio di convergenza uguale a 1 (la prima con centro in 0, la seconda con centro in -3). Inoltre, la prima serie converge per $x = -1$ (criterio di Leibniz) e diverge per $x = 1$; la seconda converge per $x = -2$ e converge assolutamente per $x = -4$.

2. Trovare una rappresentazione in serie di potenze di x della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

SOLUZIONE. Decomponiamo la funzione nel prodotto

$$f(x) = x^2 \frac{1}{(1-x)^2}$$

e rechiamo una rappresentazione in serie di potenze della frazione. Osservato che, per ogni x con $|x| < 1$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

e quest'ultima uguaglianza può essere derivata per serie, si ottiene

$$\frac{1}{(1-x)^2} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = -\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Ne segue che

$$f(x) = x^2 \frac{1}{(1-x)^2} = -x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n+1}.$$

3. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

prolungata periodicamente a $\mathbb{R}$.

SOLUZIONE. Per definizione, i coefficienti della serie di Fourier

$$c_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}},$$

di f sono dati da

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} dx \quad \text{e} \quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{\pi} - e^{-\pi}), \quad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}(1+n^2)}(e^{\pi} - e^{-\pi}), \quad b_n = \frac{(-1)^n n}{\sqrt{\pi}(1+n^2)}(e^{\pi} - e^{-\pi}),$$

quindi la serie di Fourier di f è la seguente

$$(e^{\pi} - e^{-\pi}) \left(\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\pi(1+n^2)} \sin(nx) \right).$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x^3, \\ y(1) = \frac{1}{5}.$$

SOLUZIONE. L'equazione è del primo ordine, lineare e non omogenea; l'omogenea associata è $y'(x) + (1/x)y(x) = 0$, che è a variabili separabili e ha come soluzione generale in $]0, +\infty[$ la famiglia di funzioni $y_0(x) = C(1/x)$, $C \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione di partenza avrà la forma $\bar{y}(x) = v(x)(1/x)$, con v funzione da determinare: imponendo che $\bar{y}$ sia una soluzione particolare si trova

$$\bar{y}'(x) + \frac{\bar{y}(x)}{x} = x^3, \quad \text{ossia} \quad \frac{v'(x)}{x} - \frac{v(x)}{x^2} + \frac{v(x)}{x^2} = x^3:$$

semplificando, deve valere l'equazione

$$\frac{v'(x)}{x} = x^3, \quad \text{da cui} \quad v(x) = \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

quindi

$$\bar{y}(x) = \frac{x^4}{5} + \frac{K}{x}.$$

Da $y(x) = y_0 + \bar{y}$ (inglobando la costante K nella costante C) si ottiene infine

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{x^4}{5}.$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene

$$\frac{1}{5} = y(1) = C + \frac{1}{5}, \quad \text{da cui} \quad C = 0,$$

quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{x^4}{5}.$$

5. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale del secondo ordine

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2e^{3x}$$

SOLUZIONE. L'equazione differenziale è del secondo ordine, lineare e non omogenea. Per determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$, si considera l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, le cui soluzioni sono reali e distinte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Corrispondentemente, due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{2x}$. Visto il termine non omogeneo, una soluzione particolare dell'equazione iniziale sarà data da $\bar{y}(x) = ae^{3x}$, con $a \in \mathbb{R}$ da determinare: inserendo $\bar{y}(x)$ e le sue derivate prima e seconda nell'equazione differenziale, si ottiene $a = 1$. Ne segue che $\bar{y}(x) = e^{3x}$ e dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}.$$