PROVA SCRITTA DI CALCOLO III. 22 marzo 2005.

....

Cognome e nome   firma   Corso di laurea

1. Discutere la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = x^{-n}$$

negli intervalli $I_1 = (1, +\infty)$ e $I_2 = (2, +\infty)$.

2. Trovare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}.$$

3. Rappresentare con un'opportuna serie di potenze di x l'integrale

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\, dx.$$

Calcolare il valore approssimato di I sommando i primi due termini della serie. Valutare anche l'errore commesso.

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x(y+1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

5. Scrivere l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$$

SOLUZIONE

1. È facile verificare che la successione f_n converge alla funzione $f(x) = 0$ sia in I_1 che in I_2. La convergenza in I_1 è solo puntuale mentre in I_2 è anche uniforme. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I_1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I_1} \left|\frac{1}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I_2} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I_2} \left|\frac{1}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

2. Posto $(x+2) = y$, la prima serie può essere riscritta come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n.$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 1,$$

il raggio di convergenza è $R = 1$.
La serie data, quindi, converge per

$$-1 < y < 1 \Longrightarrow -1 < x+2 < 1 \Longrightarrow -3 < x < -1.$$

Per $x = -3$ si ha la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{convergente per Leibniz.}$$

Per $x = -1$ si ha la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{divergente.}$$

In definitiva, l'insieme di convergenza della prima serie è $[-3, -1)$.

Posto $(x-3) = y$, la seconda serie può essere riscritta come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n5^n} y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n y^n.$$

Poichè
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n5^n}{(n+1)5^{n+1}}=\frac{1}{5},$$
il raggio di convergenza è $R=5$.
La serie data, quindi, converge per

$$-5<y<5\Longrightarrow -5<x-3<5\Longrightarrow -2<x<8.$$

Per $x=-2$ si ha la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\quad \text{convergente per Leibniz.}$$

Per $x=8$ si ha la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}\quad \text{divergente.}$$

In definitiva, l'insieme di convergenza della seconda serie è $[-2,8)$.

3. Lo sviluppo in serie di potenze di x della funzione $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ è

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/3}{n}x^{2n}.$$

Un calcolo esplicito mostra che

$$\binom{-1/3}{0}=1$$

$$\binom{-1/3}{1}=-\tfrac{1}{3}$$

$$\binom{-1/3}{2}=\tfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}=(-1)^2\tfrac{1\cdot 4}{3^2 2!}$$

$$\dots$$

$$\binom{-1/3}{n}=\tfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}=(-1)^n\tfrac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3^n n!}.$$

Quindi

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3^n n!}\, x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

Integrando termine a termine si ha

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3^n n!}\, x^{2n} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3^n n!} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3^n n!} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

Sommando i primi due termini si trova

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} = \frac{35}{72}.$$

L'errore ε commesso in quest'approssimazione è maggiorato dal modulo del terzo termine della serie, cioè

$$\varepsilon < \left| \frac{4}{3^2\, 2!} \frac{1}{5\, 2^5} \right| = \frac{1}{720}$$

4. L'equazione può essere riscritta come

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) \Longrightarrow \frac{dy}{y+1} = x\, dx \Longrightarrow \log|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y + 1 = Ae^{\frac{1}{2}x^2} \quad (A = \pm e^C) \Longrightarrow y = Ae^{\frac{1}{2}x^2} - 1.$$

La costante di integrazione può essere determinata imponendo la condizione iniziale

$$y(0) = 1 \Longrightarrow A - 1 = 1 \Longrightarrow A = 2,$$

per cui la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1.$$

5. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$$

che ha come soluzioni $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -5$. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0 = Ae^{-x} + Be^{-5x}.$$

Un integrale particolare $\bar{y}$ dell'equazione completa può essere cercato nella forma

$$\bar{y} = Ce^{2x}.$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene facilmente che $C = \frac{1}{21}$, per cui l'integrale generale è

$$y = Ae^{-x} + Be^{-5x} + \frac{1}{21}e^{2x}.$$