- Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
 2. Consegnare ANCHE questo foglio.
 3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
 4. Tempo a disposizione: 120 min.

1. Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt{n+2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n4^n}.$$

SOLUZIONE. Data la serie di potenze $\sum a_n x^n$, il raggio di convergenza è dato dal reciproco di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

se questo esiste (con la solita convenzione nel caso in cui esso valga 0 oppure $+\infty$). Pertanto, la prima serie ha raggio di convergenza uguale a 1 (l'intervallo di convergenza è $] -4, -2[$, con centro in -3). Inoltre, questa serie converge per $x = -4$ (criterio di Leibniz) e diverge per $x = -2$. La seconda serie ha raggio di convergenza 4 (l'intervallo di convergenza è $] -3, 5[$), con centro in 1). Inoltre, questa serie converge per $x = -3$ (criterio di Leibniz) e diverge per $x = 5$.

2. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \pi^2 - x^2, \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

prolungata periodicamente a $\mathbb{R}$.

SOLUZIONE. Per definizione, i coefficienti della serie di Fourier

$$c_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}},$$

di f sono dati da

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} dx \quad \text{e} \quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poiché la funzione f si scrive come differenza di una costante (la cui serie di Fourier coincide con lei stessa) e di una funzione pari (i cui coefficienti di Fourier b_n , $n \in \mathbb{N}$, sono tutti nulli), poiché infine la serie di Fourier della differenza di due funzioni coincide con la differenza delle serie di Fourier delle funzioni stesse (grazie alla linearità dell'integrale), da tutto ciò si deduce che, integrando due volte per parti, se

$$C_0 = 2 \frac{\pi^3}{3\sqrt{2\pi}}, \quad A_n = 4\sqrt{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad B_n = 0,$$

sono i coefficienti di Fourier della funzione x^2 , allora la serie di Fourier di f è la seguente

$$\pi^2 - \left(2 \frac{\pi^3}{3\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 4xy(x) + 6x = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

SOLUZIONE. L'equazione è del primo ordine, lineare e non omogenea; l'omogenea associata è $y'(x) - 4xy(x) = 0$, che è a variabili separabili e ha come soluzione generale la famiglia di funzioni $y_0(x) = C e^{2x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione di partenza avrà la forma $\bar{y}(x) = v(x) e^{2x^2}$, con v funzione da determinare: imponendo che $\bar{y}$ sia una soluzione particolare si trova

$$\bar{y}'(x) - 4x\bar{y}(x) = -6x, \quad \text{ossia} \quad v'(x)e^{2x^2} = -6x :$$

da cui

$$v(x) = - \int 6x e^{-2x^2} dx = \frac{3}{2} e^{-2x^2} + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

quindi

$$\bar{y}(x) = \frac{3}{2} + K e^{2x^2}.$$

Da $y(x) = y_0 + \bar{y}$ (inglobando la costante K nella costante C) si ottiene infine

$$y(x) = C e^{2x^2} + \frac{3}{2}.$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene

$$2 = y(0) = C + \frac{3}{2}, \quad \text{da cui} \quad C = \frac{1}{2},$$

quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{2x^2} + \frac{3}{2}.$$

4. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale del secondo ordine

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 3e^x$$

SOLUZIONE. L'equazione differenziale è del secondo ordine, lineare e non omogenea. Per determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$, si considera l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, le cui soluzioni sono reali coincidenti $\lambda = 3$. Corrispondentemente, due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono $y_1(x) = e^{3x}$ e $y_2(x) = x e^{3x}$. Visto il termine non omogeneo, una soluzione particolare dell'equazione iniziale sarà data da $\bar{y}(x) = a e^x$, con $a \in \mathbb{R}$ da determinare: inserendo $\bar{y}(x)$ e le sue derivate prima e seconda nell'equazione differenziale, si ottiene $a = 3/4$. Ne segue che $\bar{y}(x) = (3/4)e^x$ e dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{3}{4} e^x.$$