PROVA SCRITTA DI CALCOLO III. 25 luglio 2005.

....

Cognome e nome firma Corso di laurea

1. Discutere la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{3x+n}{x+n} \quad x \in [0, +\infty).$$

2. Trovare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n .$$

3. Scrivere l'integrale generale della seguente equazione differenziale del primo ordine

$$y' + y \cos x = \sin x \cos x.$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 2x + 1 \\ y(0) = \frac{7}{8} \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

SOLUZIONE.

1. La successione $\{f_n\}$ tende, per $n \to +\infty$, alla funzione $f(x) = 1$. Si tratta di stabilire se la convergenza è uniforme. Occorre calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\frac{3x+n}{x+n} - 1\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\frac{2x}{x+n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{2x}{x+n}.$$

Ora, è facile vedere che la funzione $g(x) = \frac{2x}{x+n}$ è sempre crescente per $x \in [0, +\infty)$ per cui

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{2x}{x+n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+n} = 2;$$

poichè quest'ultimo non è infinitesimo per $n \to +\infty$ si conclude che la convergenza non è uniforme.

2. Posto $\frac{x}{2} = y$ la serie può essere riscritta nel modo seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} y^n.$$

Il raggio R di convergenza di quest'ultima è il reciproco del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{n+1}{n} = 1,$$

per cui $R = 1$. La serie converge $\forall y \in (-1, 1)$ cioè $\forall x \in (-2, 2)$. È inoltre facile vedere che per $x = \pm 2$ la serie non converge (in entrambi i casi il termine generale non è infinitesimo per $n \to +\infty$), per cui l'insieme di convergenza risulta essere l'intervallo aperto $(-2, 2)$.

3. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine del tipo

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

dove $P(x) = \cos x$ e $Q(x) = \sin x \cos x$.
Detta quindi $\mu(x) = \sin x$ una primitiva di $P(x)$, l'integrale generale dell'equazione si può scrivere come

$$y = e^{-\sin x}\left(\int e^{\sin x} \cos x \sin x \, dx\right) = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x \, dx\right) =$$
$$= e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C\right) = Ce^{-\sin x} + (\sin x - 1).$$

4. L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

ha come soluzioni $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_0 = Ae^x + Be^{4x}.$$

È possibile cercare un integrale particolare dell'equazione completa nella forma

$$\bar{y} = Cx + D.$$

Derivando due volte e sostituendo nell'equazione si ha

$$-5C + 4Cx + 4D = 2x + 1.$$

da cui si ottengono le seguenti condizioni

$$\begin{cases} 4C = 2 \\ -5C + 4D = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{2} \\ D = \frac{7}{8} \end{cases} .$$

L'integrale generale dell'equazione completa è

$$y = y_0 + \bar{y} = Ae^x + Be^{4x} + \frac{x}{2} + \frac{7}{8}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottengono i valori delle due costanti A e B

$$\begin{cases} y(0) = \frac{7}{8} \\ y'(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A + 4B + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{6} \end{cases} .$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y = \frac{1}{6}e^x - \frac{1}{6}e^{4x} + \frac{x}{2} + \frac{7}{8}.$$