. . . .

Cognome e nome   matricola   Corso di Laurea (FIS, MAT)

CALCOLO 3   3 aprile 2006

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Si consideri la successione di funzioni reali di variabile reale

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}\ .$$

a) Calcolare il limite puntuale di f_n .
b) Stabilire se la convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$.
c) Se la convergenza non fosse uniforme in $\mathbb{R}$, è possibile togliere un intervallo piccolo a piacere, in modo che la convergenza diventi uniforme in $\mathbb{R}$ privato di questo intervallo?
d) Dire se è vero che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

SOLUZIONE.
a) Osservato che

$$f_n(x) = \frac{x^2}{\frac{1}{n}+x^2}\ .$$

risulta evidente che il limite puntuale di f_n è costituito dalla funzione f tale che $f(0)=0$ e $f(x)=1$ per ogni $x\neq 0$.
b) La convergenza non può essere uniforme, dato che per ogni n f_n è una funzione continua, mentre il limite puntuale non lo è (in 0).
c) Sia $\delta>0$ arbitrario. Posto $E_\delta =]-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty[$, dimostriamo che f_n converge uniformemente a f in E_δ . Si ha

$$\sup_{x\in E_\delta}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in E_\delta}\left|\frac{nx^2}{1+nx^2}-1\right| = \sup_{x\in E_\delta}\frac{1}{1+nx^2} = \frac{1}{1+n\delta^2}$$

e l'ultima quantità tende a 0 per $n\to+\infty$, da cui la tesi.
d) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{nx^2+1-1}{1+nx^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+nx^2}\right)\,dx =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\sqrt{n}\right) = 1,$$
$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 1,$$

pertanto l'uguaglianza proposta è vera.

---

2. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)2^k}\ .$$

Detta $f(x)$ la somma della serie, calcolare $f'(x)$ e dire dove è definita.

SOLUZIONE. Si tratta di una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è 2, infatti per ogni k

$$\frac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+2)2^{k+1}}\right|}{\left|\frac{x^k}{(k+1)2^k}\right|} = \frac{|x|}{2}\ \frac{k+1}{k+2}\ ;$$

per il criterio del rapporto, si ha convergenza (assoluta) per tutti i valori di x tali che $x/2 < 1$, da cui la nostra tesi. Resta da esaminare il comportamento della serie per $x = \pm 2$: se $x = 2$, allora la serie data diventa la serie armonica, che diverge; se $x = -2$, allora la serie data diventa la serie armonica a segno alterno, che converge per il criterio di Leibniz. Pertanto l'insieme di convergenza puntuale è $[-2, 2[$.

Detta $f : [-2, 2[\to \mathbb{R}$ la somma della serie, grazie ai noti teoremi sulle serie di potenze f è derivabile in $]-2, 2[$ e la derivata vale

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{(k+1)2^k}\,, \qquad \forall x \in]-2, 2[.$$

Osserviamo che la funzione f può essere determinata in modo esplicito: ricordando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\log(1 + y)$, per ogni $x \in [-2, 2[$ con $x \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^k}{k+1} = \frac{2}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{k+1}}{k+1} = \frac{2}{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(-x/2)^{k+1}}{k+1} = \\ &= -\frac{2}{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-x/2)^{k+1}}{k+1} = -\frac{2}{x}\log\left(1 - \frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

mentre $f(0) = 1$. In particolare, la funzione f risulta derivabile anche per $x = -2$ e si ha

$$f'(x) = \frac{2}{x(2-x)} + \frac{2}{x^2}\log\left(1 - \frac{x}{2}\right), \qquad \forall x \in [-2, 2[, \quad x \neq 0,$$

mentre $f'(0) = 1/4$ (risultato al quale si può pervenire sia calcolando direttamente la somma della serie derivata per $x = 0$ che come limite di $f'(x)$ per $x \to 0$). Si noti, infine, che il valore $f'(-2)$ NON è esprimibile attraverso la serie derivata.

---

3. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y^2(x) + xy(x) + x^2}{x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

specificando il dominio della soluzione. (Suggerimento: può essere utile il cambiamento di variabile $z(x) = y(x)/x$).

SOLUZIONE. Posto $z(x) = y(x)/x$, si ricava $y(x) = xz(x)$, quindi $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dunque, l'equazione differenziale diventa a variabili separabili: sottintendendo per semplicità la dipendenza da x,

$$xz' = z^2 + 1, \qquad \frac{z'}{1+z^2} = \frac{1}{x}\,, \qquad \arctan z = \log|x| + C,$$

dove C è un'arbitraria costante. Se $C = \log K$, dove $K > 0$ è un'altra costante arbitraria, si ottiene $\arctan z(x) = \log(K|x|)$: in particolare, x deve appartenere ad un intervallo che non contiene 0. Dalla condizione iniziale si deduce che la soluzione deve essere definita in un intorno di 1 e d'altra parte deve soddisfare $z(1) = y(1) = 0$, quindi K deve soddisfare la condizione $0 = z(1) = \log K$, da cui $K = 1$. Dunque, deve essere $\arctan z(x) = \log x$, da cui $z(x) = \tan(\log x)$ e quindi $y = x \tan(\log x)$, definita per $x \in]e^{-\pi/2}, e^{\pi/2}[$.