. . . .

Cognome e nome matricola Corso di Laurea (FIS, MAT)

CALCOLO 3 (studenti aa. 2006-2007) 4 aprile 2007

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

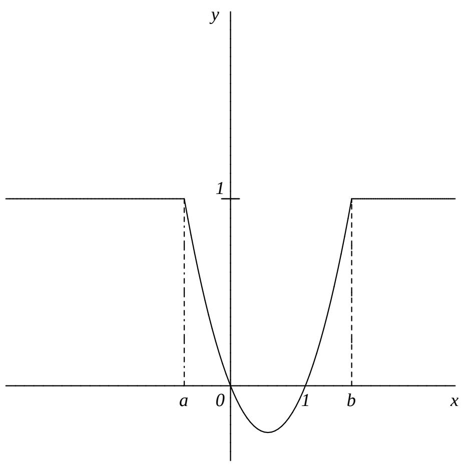
1. Si consideri la successione di funzioni reali di variabile reale

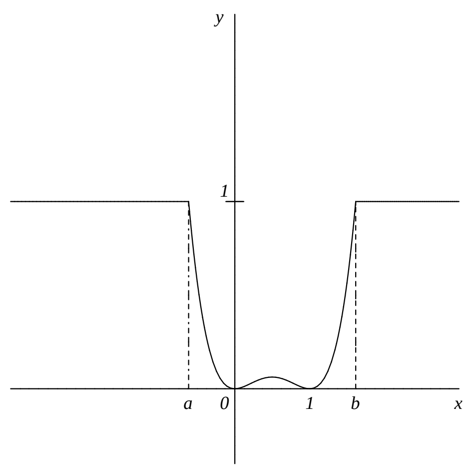
$$f_n(x) = \min\{1, (x^2 - x)^n\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Disegnare il grafico di f_1 .
b) Calcolare il limite puntuale di f_n .
c) Stabilire se la convergenza è uniformeme in $\mathbb{R}$, motivando la risposta. Nel caso in cui la convergenza non fosse uniforme in $\mathbb{R}$, determinare tre intervalli disgiunti di cui uno illimitato superiormente, uno illimitato inferiormente, e uno limitato contenente $\{0, 1\}$ nei quali vi è convergenza uniforme.

SOLUZIONE.

a) Il grafico di f_1 è riportato nella figura di sinistra; per completezza, nella figura di destra è riportato il il grafico di f_2 . In entrambi i casi, si è posto $a = (1 - \sqrt{5})/2$, $b = (1 + \sqrt{5})/2$.





b) Il limite puntuale di f_n è costituito dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[, \\ 0, & \text{se } x \in]a, b[\end{cases}$$

(stesso significato delle quantità a e b che nel punto precedente).

c) La convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$ in quanto f_n è continua per ogni n, mentre f non lo è (precisamente, in a e in b). Tre intervalli soddisfacenti le condizioni richieste sono, ad esempio, $[b, +\infty[$, $]-\infty, a]$ e $[0, 1]$. Visto che nelle due semirette si ha $f_n = 1$ per ogni n (e quindi la convergenza uniforme è ovvia), occorre discutere solo il caso dell'intervallo $[0, 1]$, ove si ha

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |(x^2 - x)^n| = \sup_{x \in [0,1]} |x(x-1)|^n = \frac{1}{4^n}$$

(la funzione $|x(x-1)|$ si annulla in 0 e in 1 e raggiunge il suo massimo nell'intervallo $[0, 1]$ in corrispondenza a $x = 1/2$). L'ultima quantità tende a 0 per $n \to +\infty$, da cui la tesi.

---

2. Si scriva lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x \sin x, \quad x \in]-\pi, \pi]$, prolungata per periodicità a $\mathbb{R}$. Si dica qual è il limite puntuale della serie di Fourier associata a f.

SOLUZIONE. Per definizione, la serie di Fourier di f è la seguente

$$c_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \ :$$

poiché la funzione f è pari, i coefficienti b_n saranno tutti nulli; gli altri sono dati da

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx,$$
$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Integrando per parti, si trova

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \Big[-x\cos x \Big]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx \right\} = \sqrt{2\pi};$$
$$a_1 = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(2x)\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \Big[-\frac{x}{2}\cos(2x) \Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\, dx \right\} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Utilizzando la formula trigonometrica $\sin x \cos(nx) = (1/2)[\sin(n+1)x + \sin(1-n)x]$ e di nuovo integrando per parti, si trova

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(n+1)x\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(1-n)x\, dx \right\} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ -\frac{1}{n+1} \Big[x\cos(n+1)x \Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{(n+1)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+1)x\, dx - \frac{1}{1-n} \Big[x\cos(1-n)x \Big]_{-\pi}^{\pi} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(1-n)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(1-n)x\, dx \right\} = 2\sqrt{\pi}\frac{(-1)^n}{1-n^2}\,,$$

$n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Quanto alla convergenza, osservato che la funzione f prolungata per periodicità a $\mathbb{R}$ è regolare a tratti e continua ovunque, per un noto teorema la serie di Fourier di f converge a f puntualmente in $\mathbb{R}$.

---

3. Si considerino le equazioni differenziali

$$\begin{aligned} &(1) \qquad y''(x) - y(x) = 0, \\ &(2) \qquad y''(x) - y(x) = 2x, \\ &(3) \qquad y''(x) - y(x) = 2|x|, \end{aligned}$$

a) Si calcolino tutte le soluzioni di (1).
b) Si calcolino tutte le soluzioni di (2).
c) Si calcolino tutte le soluzioni di (3).
d) Determinare tutte le soluzioni di (3) tali che $y'(0) = 0$.
e) Determinare, se esistono, tutte le soluzioni di (1), (2), (3) tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

SOLUZIONE. Anzitutto si osservi che le tre equazioni differenziali sono del secondo ordine, lineari e a coefficienti costanti, con equazione caratteristica $\lambda^2 - 1 = 0$, quindi due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono e^x e e^{-x}.

a) La totalità delle soluzioni di (1) è espressa dalla formula $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, al variare di C_1 , $C_2 \in \mathbb{R}$.
b) Osservato che la funzione $\overline{y}(x) = -2x$ è soluzione dell'equazione non omogenea (la si trova facilmente per tentativi), la totalità delle soluzioni di (2) è espressa dalla formula $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - 2x$, al variare di C_1 , $C_2 \in \mathbb{R}$.
c) In base alle stesse considerazioni del punto precedente, si trova che la totalità delle soluzioni di (3) definite in $]0, +\infty[$ è espressa dalla formula $y_+(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - 2x$, al variare di C_1 , $C_2 \in \mathbb{R}$, mentre la totalità delle soluzioni di (3) definite in $]-\infty, 0[$ è espressa dalla formula $y_-(x) = K_1e^x + K_2e^{-x} + 2x$, al variare di K_1 , $K_2 \in \mathbb{R}$. Si pone il problema del raccordo tra le due famiglie in 0, se si vogliono generare soluzioni definite in tutto $\mathbb{R}$: questa operazione dà luogo ad una funzione

$$y(x) = \begin{cases} y_-(x), & x \in]-\infty, 0[, \\ y_0, & x = 0, \\ y_+(x), & x \in]0, +\infty[, \end{cases}$$

con C_1 , C_2 , K_1 , K_2 e y_0 da determinare in modo che y, y' e y'' siano continue in 0 (infatti, una funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ può essere una soluzione di (3) solo se è di classe $\mathbf{C}^2$). Pertanto, devono valere le uguaglianze

$$\lim_{x\to0^-} y_-(x) = \lim_{x\to0^+} y_+(x) = y_0, \qquad \lim_{x\to0^-} y'_-(x) = \lim_{x\to0^+} y'_+(x), \qquad \lim_{x\to0^-} y''_-(x) = \lim_{x\to0^+} y''_+(x),$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = y_0, \\ C_1 + C_2 = y_0, \\ K_1 - K_2 + 2 = C_1 - C_2 - 2, \\ K_1 + K_2 = C_1 + C_2 : \\ \end{cases}$$

la prima equazione può essere usata per determinare il valore y_0 della funzione saldata in $x = 0$; la seconda è automaticamente soddisfatta non appena valga la quarta; dalla terza e dalla quarta si ricava (per addizione e sottrazione) la coppia di condizioni $C_1 = K_1 + 2$ e $C_2 = K_2 - 2$, che consentono di determinare C_1 e C_2 non appena siano noti K_1 e K_2. In conclusione, il sistema è soddisfatto se, presi ad arbitrio due numeri reali K_1 e K_2 , si pone $C_1 = K_1 + 2$, $C_2 = K_2 - 2$ e $y_0 = K_1 + K_2$. Corrispondentemente, la funzione y è di classe $\mathbf{C}^2$, inoltre soddisfa (3) in ogni $x \in \mathbb{R}$: ciò è banalmente vero se $x \neq 0$ per come sono state costruite rispettivamente y_- e y_+ e vale anche in $x = 0$, ove il limite destro e sinistro di $y''(x) - y(x) - 2|x|$ sono entrambi nulli per le condizioni imposte ai coefficienti. Ne segue che la totalità delle soluzioni di (3) è espressa dalla formula

$$y(x) = K_1 e^x + K_2 e^{-x} + g(x), \qquad \text{ove} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ 2e^x - 2e^{-x} - 2x, & x > 0, \end{cases}$$

al variare di K_1 , $K_2 \in \mathbb{R}$.

d) Calcolando $y'(0)$ a partire dall'ultima espressione trovata nel punto precedente, si ottiene $y'(0) = K_1 - K_2 + 2$, pertanto si ha $y'(0) = 0$ se e solo se $K_2 = K_1 + 2$, quindi la formula risolutiva diventa

$$y(x) = K_1(e^x + e^{-x}) + h(x), \qquad \text{ove} \qquad h(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ 2e^x - 2x, & x > 0, \end{cases}$$

al variare di $K_1 \in \mathbb{R}$ (si noti che abbiamo a che fare con una famiglia di infinite funzioni, dipendenti da un parametro reale).

e) Per quanto visto a proposito dei primi tre punti, è possibile determinare soluzioni soddisfacenti la condizione $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$ solo nel caso (1), e sono tutte e sole quelle con $C_1 = 0$.