. . . .

Cognome e nome matricola Corso di Laurea (FIS, MAT)

CALCOLO 3 27 giugno 2007

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Si consideri la successione di funzioni reali di variabile reale

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n + x^2}\ .$$

a) Calcolare il limite puntuale f di f_n .
b) Dimostrare che f_n converge uniformemente a f in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$.
c) f_n converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$?

SOLUZIONE.
a) Il limite puntuale di f_n è costituito dalla funzione f identicamente nulla.
b) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrari e dimostriamo che f_n converge uniformemente a f in $[a, b]$. Si ha

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \frac{x^2 + n - n}{n + x^2} = \sup_{x\in[a,b]} \left(1 - \frac{1}{1 + x^2/n}\right) = 1 - \frac{1}{1 + \delta^2/n}\ ,$$

dove δ è il più grande tra $|a|$ e $|b|$. L'ultima quantità tende a 0 per $n \to +\infty$, da cui la tesi.
c) La convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$, dato che per ogni n

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2 + n - n}{n + x^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(1 - \frac{1}{1 + x^2/n}\right) = 1.$$

---

2. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\ .$$

a) Determinare l'intervallo di convergenza della serie e il comportamento della serie agli estremi.
b) Dire su quali intervalli la serie converge uniformemente.
c) Calcolare la somma della serie.

SOLUZIONE.
a) Si verifica facilmente che il raggio di convergenza è 1 ($= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$). Resta da esaminare il comportamento della serie per $x = \pm 1$: in entrambi i casi, il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi la serie non converge.
b) La serie converge uniformemente in $[a, b]$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $-1 < a < b < 1$.
c) La somma della serie si può ottenere così. Per ogni $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{1}{x(1-x)^2}\ .$$

---

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -2xy^2(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a) Si calcoli la soluzione per $y_0 > 0$ precisandone il dominio.
b) Si calcoli la soluzione per $y_0 = 0$ precisandone il dominio.
c) Si calcoli la soluzione per $y_0 < 0$ precisandone il dominio.
d) Disegnare nel piano cartesiano il grafico qualitativo delle soluzioni.

SOLUZIONE. Anzitutto si osservi che, se $y_0 \neq 0$, allora in un intorno di 0 sarà $y \neq 0$, quindi le variabili possono essere separate e l'equazione differenziale diventa

$$\frac{y'}{y^2} = -2x, \qquad \text{da cui} \qquad \frac{1}{y} = x^2 + C, \qquad \text{ossia} \qquad y(x) = \frac{1}{x^2 + C}\ ,$$

dove C è una costante a priori arbitraria, il cui valore è stabilito dalla condizione iniziale: $y(0) = y_0 = 1/C$, quindi $C = 1/y_0$. La soluzione è definita fintantoché il denominatore rimane diverso da 0, quindi:

a) se $y_0 > 0$, allora $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

c) se $y_0 < 0$, allora $y : \left]-\sqrt{\frac{-1}{y_0}}, \sqrt{\frac{-1}{y_0}}\right[\to \mathbb{R}$.

b) Se $y_0 = 0$, allora il calcolo effettuato non è lecito: è tuttavia evidente che la funzione identicamente nulla definita in $\mathbb{R}$ soddisfa tanto l'equazione differenziale che la condizione iniziale. Per l'unicità, questa è la sola soluzione.

d) Nelle figure sottostanti è rappresentato il grafico della soluzione per $y_0 = 1$ (figura a sinistra) e per $y_0 = -1$ (figura a destra: l'unità di misura nei due assi non è la stessa).