.................................................................................................................................

Cognome e nome | matricola | Corso di Laurea (FIS, MAT)

---

CALCOLO 3 — 19 luglio 2007

---

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

**1.** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}\,, \qquad x \in [0, +\infty[.$$

a) Determinare il limite puntuale $f$ di $f_n$ e studiare la convergenza uniforme di $f_n$ a $f$ in $[0, +\infty[$.

b) Studiare la convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x).$$

SOLUZIONE. Per ogni $n$, la funzione $f_n$ si annulla in 0, è strettamente crescente e tende a $1/n$ per $x \to +\infty$.

a) Il limite puntuale è la funzione identicamente nulla; poiché, per il teorema sul limite delle funzioni monotone, $\sup\{f_n(x),\ x \in [0, +\infty[\} = 1/n$, si trova che la convergenza è uniforme in $[0, +\infty[$.

b) La serie converge puntualmente per il criterio di Leibniz, poiché per ogni $x \in [0, +\infty[$ la successione $f_n(x)$ è non crescente e infinitesima.

---

**2.** Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n!}\right) x^n.$

a) Calcolare il raggio di convergenza e studiare il comportamento agli estremi.

b) Calcolare la somma della serie.

SOLUZIONE. Poniamo $a_n = 1 - 1/n!$, in modo che la serie assegnata diventi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Osserviamo anche che $a_n$ tende a 1 per $n \to +\infty$.

a) Per un teorema, il raggio di convergenza è dato dal reciproco del limite di $\sqrt[n]{a_n}$, se questo esiste ed è non nullo. Si vede facilmente che il limite in questione esiste e vale 1, pertanto il raggio di convergenza è 1. Per $x = 1$ la serie diverge (è a termini positivi e il termine generale non è infinitesimo); per $x = -1$ la serie è indeterminata, infatti le somme parziali possono essere scritte come

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(1 - \frac{1}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

e, mentre la seconda somma converge a $1/e$, la prima non ha limite (assume alternativamente i valori 1 e 0), pertanto la somma delle due non ha limite.

b) Per $|x| < 1$ convergono entrambe le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\,,$$

con somma, rispettivamente, $1/(1-x)$ e $e^x$. Pertanto, la somma della serie data è pari a $1/(1-x) - e^x$.

---

**3.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y^2(x) - y(x)}{x}, \\ y(1) &= y_0. \end{aligned}$$

a) Si determini per quali valori di $y_0$ esistono soluzioni costanti e si dica qual è il loro dominio.

b) Si calcoli la soluzione per $y_0 = 1/2$ precisandone il dominio.

c) Si calcoli la soluzione per $y_0 = 2$ precisandone il dominio.

d) Si calcoli la soluzione per $y_0 = -2$ precisandone il dominio.

SOLUZIONE. Osserviamo preliminarmente che il secondo membro dell'equazione differenziale fa intervenire la funzione $f(x, y) = (y^2 - y)/x$, che è definita e continua in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$, lipschitziana in $A \cap (\mathbb{R}\times] - M, M[)$, qualunque sia $M > 0$. Pertanto, il problema di Cauchy ha localmente una e una sola soluzione.

a) Una condizione necessaria affinché una soluzione del problema di Cauchy sia costante è che $y'(x) = 0$ per ogni $x$ appartenente al dominio di $y$. Dall'equazione differenziale scende allora che anche $y^2(x) - y(x)$ si deve annullare identicamente, il che è possibile se e solo se $y(x) = 0$ per ogni $x$ oppure $y(x) = 1$ per ogni $x$. Dunque, una soluzione $y$ del problema di Cauchy può essere costante solo se vale identicamente 0 oppure 1: corrispondentemente, il valore assunto in $x = 1$ sarà, nel primo caso, 0 e nel secondo 1. Si verifica subito che la funzione data da $y(x) = 0$ (rispettivamente, $y(x) = 1$) per ogni $x \in ]0, +\infty[$ risolve il problema di Cauchy con $y_0 = 0$ (rispettivamente, $y_0 = 1$) e non vi possono essere altre soluzioni costanti per la prima parte del ragionamento. Il dominio $]0, +\infty[$ è il massimo possibile: non può contenere 0 (altrimenti il secondo membro dell'equazione perde di senso) e non può contenere numeri negativi (altrimenti la soluzione risulterebbe definita in un insieme che non è un intervallo, nemmeno in senso lato).

b) L'equazione differenziale è a variabili separabili: preso atto che, per il teorema di esistenza e unicità locale, se la soluzione assume valore 0 oppure 1 in un qualunque $x > 0$ allora la soluzione è costante, possiamo determinare le soluzioni dell'equazione differenziale nell'ipotesi $y_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 1$ come segue:

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y^2 - y} &= \frac{1}{x}, \\
\int \frac{1}{y^2 - y}\, dy &= \log x + C, \\
\int \left( -\frac{1}{y} + \frac{1}{y - 1} \right) dy &= \log x + C, \\
-\log |y| + \log |y - 1| &= \log x + C, \\
\frac{y - 1}{y} &= Kx, \\
y(x) &= \frac{1}{1 - Kx}\,, \qquad x \neq \frac{1}{K}\,,
\end{aligned}$$

dove $C$ e $K$ sono costanti a priori arbitrarie, il cui valore è stabilito dalla condizione iniziale. Osserviamo che nel calcolo fatto deve essere $x > 0$, grazie al fatto che la condizione iniziale fa intervenire $x = 1$, mentre $x = 0$ non è un valore permesso. Dunque, la formula trovata per la soluzione è valida fintantoché il denominatore rimane diverso da 0, purché $x$ appartenga ad un intervallo che: (i) contiene 1, (ii) non contiene 0, (iii) non contiene $1/K$. Poiché dalla stessa formula risulta $y(1) = 1/(1 - K)$, mentre la condizione iniziale prescrive $y(1) = y_0$, si deduce che $K = 1 - 1/y_0$, da cui $1/K = 1 + 1/(y_0 - 1)$ e dunque l'insieme di definizione è costituito da un intervallo che: (i) contiene 1, (ii) non contiene 0, (iii) non contiene $1 + 1/(y_0 - 1)$. In particolare, se $y_0 = 1/2$, allora $K = -1$ e la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{1 + x}\,, \qquad \text{definita per} \qquad x > 0.$$

c) Partendo dalla formula trovata nel punto precedente, se $y_0 = 2$, allora $K = 1/2$ e la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{1 - x/2}\,, \qquad \text{definita per} \qquad x \in ]0, 2[.$$

d) Partendo dalla formula trovata nel punto b), se $y_0 = -2$, allora $K = 3/2$ e la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{1 - 3x/2}\,, \qquad \text{definita per} \qquad x > \frac{2}{3}\,.$$