. . . .

Cognome e nome matricola Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

CALCOLO 3 12 settembre 2007

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}\ , \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Determinare il limite puntuale f di f_n .
b) Dimostrare che f_n non converge uniformemente a f in tutto $\mathbb{R}$.
c) Dimostrare che f_n converge uniformemente a f in $[\epsilon, +\infty[$, per ogni $\epsilon > 0$.

SOLUZIONE. Per cominciare, si osservi che $f_n(0) = 0$, mentre per $x \neq 0$

$$f_n(x) = \frac{1}{nx}\frac{n2^n x^2}{1+n2^n x^2} = \frac{1}{nx}\left(1 - \frac{1}{1+n2^n x^2}\right).$$

a) Dalla rappresentazione precedente risulta subito che f_n converge puntualmente a 0 per $n \to +\infty$.
b) Per ogni n e per ogni x si ha

$$f_n'(x) = \frac{2^n}{1+n2^n x^2}\left(1 - n2^n x^2\right),$$

in particolare si ha $f_n'(x) = 0$ se e solo se

$$x = x_n^{\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{n2^n}} \qquad \text{e} \qquad f_n(x_n^{\pm}) = \pm\frac{2^{n/2-1}}{\sqrt{n}}\ .$$

Si verifica facilmente che f_n cresce in $[x_n^-, x_n^+]$ e decresce in $]-\infty, x_n^-] \cup [x_n^+, +\infty[$, dunque x_n^+ è punto di massimo assoluto e x_n^- è punto di minimo assoluto, quindi

$$\sup\{|f_n(x)|,\ x \in \mathbb{R}\} = \frac{2^{n/2-1}}{\sqrt{n}}\ ,$$

che non tende a 0 per $n \to +\infty$. Dunque, f_n non converge uniformemente a 0 in $\mathbb{R}$.
c) Sia $\epsilon > 0$ arbitrario e sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $x_m^+ < \epsilon$. Dallo studio di funzione svolto nel punto precedente risulta che

$$\sup\{|f_n(x)|,\ x \in [\epsilon, +\infty[\} = f_n(\epsilon)\ ,$$

che tende a 0 per $n \to +\infty$. Dunque, f_n converge uniformemente a 0 in $[\epsilon, +\infty[$.

---

2. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha (\cos x)^n,$$

per $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare l'insieme di convergenza per $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ e $\alpha = -2$.
b) Calcolare la somma della serie per $\alpha = 0$ e determinare un intervallo in cui vi è convergenza uniforme.
c) Determinare tutti i valori di α per cui vi è convergenza uniforme in tutto $\mathbb{R}$.
d) Calcolare la somma della serie per $\alpha = -1$ (suggerimento: scrivere la formula di Taylor di $\log(1-y)$).

SOLUZIONE.

a) Supponiamo $\alpha = 0$: la serie è una serie geometrica di ragione $\cos x$, quindi converge se e solo se $|\cos x| < 1$, ossia per $x \neq k\pi$, qualunque sia k intero relativo. Supponiamo $\alpha = -1$ e distinguiamo tre casi: $|\cos x| < 1$

(ossia $x \neq k\pi$), $\cos x = 1$ (ossia $x = 2k\pi$), $\cos x = -1$ (ossia $x = (2k+1)\pi$). Nel primo caso la serie converge assolutamente, infatti la serie il cui termine generale è

$$|n^\alpha (\cos x)^n| = \left|\frac{(\cos x)^n}{n}\right| = \frac{|\cos x|^n}{n}$$

converge per il criterio del rapporto. Nel secondo caso ($\cos x = 1$) si ha a che fare con la serie armonica che diverge. Nel terzo caso ($\cos x = -1$) si ha a che fare con la serie armonica a segni alterni, che converge per il criterio di Leibniz. Infine, supponiamo $\alpha = -2$: la serie converge assolutamente in $\mathbb{R}$ grazie al criterio del confronto (con la serie il cui termine generale è $1/n^2$).

b) Come detto sopra, la serie è geometrica di ragione $\cos x$, quindi la somma vale

$$\frac{1}{1-\cos x} - 1 = \frac{\cos x}{1-\cos x}$$

(si sottrae 1 perché la somma parte da $n = 1$). Osservando che, posto $y = \cos x$, la serie diventa $\sum y^n$, che è una serie di potenze avente raggio di convergenza 1. Dunque, si ha convergenza uniforme in ogni intervallo $[-r, r]$ nella variabile y, per ogni $r \in]0, 1[$.

c) Per il criterio di Weierstrass, la serie data converge totalmente, quindi uniformemente, se per ogni n esiste c_n tale che

$$\sup\left\{\left|\frac{(\cos x)^n}{n^{-\alpha}}\right|,\ x \in \mathbb{R}\right\} \leq c_n$$

e $\sum c_n$ converge. Osservato che $|\cos x|^n \leq 1$, le ipotesi del criterio sono soddisfatte se $c_n = n^\alpha$ e $\alpha < -1$: pertanto in questo caso la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Se $\alpha = -1$, sappiamo dal primo punto che la serie non converge in tutto $\mathbb{R}$ e lo stesso vale se $\alpha > -1$ per il criterio del confronto. Dunque, la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha < -1$.

d) E' noto che la serie di Taylor di $\log(1+t)$ è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n}\,, \qquad \text{pertanto} \qquad \log(1-y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n}$$

(per ogni t con $|t| < 1$ e per $y = -t$). Dunque, la somma richiesta vale $\log(1 - \cos x)$ per ogni $x \neq k\pi$.

---

3. Si consideri il problema di Cauchy in avanti, cioè per $x \geq 0$,

$$\begin{cases} y'(x) = ky(x)(1 - y(x)), \\ y(0) = y_0\,, \end{cases}$$

dove k è un parametro positivo.

(a) Determinare per quali valori di y_0 esistono soluzioni costanti.

(b) Calcolare la soluzione per $y > 0$ precisandone il dominio. Se possibile, calcolare $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

(b) Calcolare la soluzione per $y < 0$. Denotando con $[0, b[$ l'intervallo massimale in cui esiste la soluzione, calcolare $\lim_{x\to b^-} y(x)$.

SOLUZIONE. Si osservi preliminarmente che il secondo membro dell'equazione differenziale è data dalla funzione $f(x, y) = ky(1 - y)$ che è definita e continua in $\mathbb{R}^2$, lipschitziana in ogni dominio di tipo $\mathbb{R}\times] - M, M[$, al variare di $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$. In particolare vale il teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy. Inoltre, l'equazione è a variabili separabili.

(a) Se una funzione costante risolve il problema di Cauchy, allora il secondo membro dell'equazione differenziale deve annullarsi e la condizione necessaria affinché ciò avvenga è $y = 0$ oppure $y = 1$. Si verifica subito che questa condizione è anche sufficiente, non appena $y_0 = 0$ o $y_0 = 1$ rispettivamente. Per concludere, si osservi che grazie al teorema di unicità locale per il problema di Cauchy se $y_0 \in]0, 1[$ allora la soluzione del problema di Cauchy sará tale che $y(x) \in]0, 1[$ per ogni x e in modo analogo se $y_0 < 0$ o $y_0 > 1$.

(b) Supponiamo $y_0 > 0$: se fosse $y_0 = 1$, allora per l'unicità locale la soluzione sarebbe la costante 1, quindi supporremo anche $y_0 \neq 1$. Ancora per l'unicità locale la soluzione dovrà essere sempre diversa sia da 0 che da 1 e il calcolo seguente è possibile:

$$\int \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \int k\,dx, \qquad \int \frac{1-y+y}{y(1-y)}\,dy = kx + C, \qquad \int \left(\frac{1}{y}\frac{1}{1-y}\right)dy = kx + C,$$

da cui

$$\log|y|-\log|1-y| = Kx+C, \quad \text{cioè} \quad \frac{y}{|1-y|} = C_1 e^{kx}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{y}{1-y} = C_2 e^{kx}, \quad \text{da cui} \quad y(x) = \frac{C_2 e^{kx}}{1+C_2 e^{kx}}\,,$$

dove C è una costante arbitraria; C_1 è una costante positiva arbitraria e $C_2 = \begin{cases} C_1, & \text{se } y_0 < 1, \\ -C_1, & \text{se } y_0 > 1 \end{cases}$ (grazie al fatto che, come osservato nel punto (a) di questa soluzione, se $y_0 \in]0,1[$ allora $y(x) \in]0,1[$ per ogni x). Imponendo la condizione iniziale si trova

$$y_0 = \frac{C_2}{1+C_2}\,, \qquad \text{da cui} \qquad C_2 = \frac{y_0}{1-y_0} \quad :$$

si osservi in particolare che $C_2 > 0$, se $y_0 < 1$ e $C_2 < -1$, se $y_0 > 1$. Dunque, il dominio della soluzione $y(x)$ è evidentemente $[0,+\infty[$, se $y_0 < 1$; se $y_0 > 1$ allora il dominio della funzione $y(x)$ è un intervallo contenente 0 solo se è del tipo $]x_0,+\infty[$, dove x_0 è il valore di x che annulla il denominatore di $y(x)$: a conti fatti risulta

$$x_0 = -\frac{1}{k}\log\frac{y_0}{y_0-1}$$

che è una quantità negativa, pertanto anche in questo caso il dominio della soluzione $y(x)$ è $[0,+\infty[$. Si vede subito che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{C_2 e^{kx}}{1+C_2 e^{kx}} = 1.$$

(c) Come osservato nel punto (a) di questa soluzione, se $y_0 < 0$ allora $y(x) < 0$ per ogni x. Dunque, il calcolo svolto nel punto (b) può essere rifatto, trovando la seguente espressione per la soluzione

$$y(x) = \frac{C_2 e^{kx}}{1+C_2 e^{kx}}\,,$$

dove C_2 è una costante negativa arbitraria. Anche la condizione iniziale può essere imposta come nel punto (b): si trova

$$C_2 = \frac{y_0}{1-y_0} \qquad \text{e si ha} \qquad -1 < C_2 < 0.$$

Anche in questo caso, l'insieme di definizione della funzione $y(x)$ non è tutto $\mathbb{R}$: è un intervallo contenente 0 solo se è del tipo $]-\infty, x_0[$, dove x_0 è il valore di x che annulla il denominatore di $y(x)$: a conti fatti risulta ancora

$$x_0 = -\frac{1}{k}\log(-C_2)$$

che è una quantità positiva, pertanto in questo caso il dominio della soluzione $y(x)$ è $[0,x_0[$. Si vede subito che

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{C_2 e^{kx}}{1+C_2 e^{kx}} = -\infty$$

(il limite del numeratore è negativo, mentre il denominatore è sempre positivo per $x \in [0,x_0[$).