

CALCOLO 3

8 gennaio 2008

- Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
 2. Consegnare ANCHE questo foglio.
 3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
 4. Tempo a disposizione: 120 min.

1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- a) Dire se ciascuna f_n è continua.
- b) Determinare l'insieme A di convergenza puntuale di f_n e il limite puntuale f .
- c) Dire se f_n converge uniformemente a f in A . Se la convergenza su A non fosse uniforme, determinare un intervallo illimitato in cui vi è convergenza uniforme.

SOLUZIONE.

- a) Per ogni n , la funzione f_n è continua in 0, grazie al limite notevole $(\sin y)/y \rightarrow 1$ per $y \rightarrow 0$. La continuità per $x \neq 0$ è ovvia.
- b) Per ogni $x \neq 0$ $f_n(x)$ tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$ (il numeratore è limitato, il valore assoluto del denominatore tende a $+\infty$). Pertanto $A = \mathbb{R}$ e il limite puntuale è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- c) La convergenza in A non è uniforme: se per assurdo lo fosse, allora il limite uniforme coinciderebbe con il limite puntuale f che di conseguenza dovrebbe essere una funzione continua, il che è falso. Un intervallo illimitato in cui f_n converge uniformemente è, ad esempio, la semiretta $[1, +\infty[$: in questo caso, il limite è la funzione identicamente nulla. Infatti, avendo osservato che per ogni n e per ogni $x \in [1, +\infty[$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n},$$

si deduce che l'estremo superiore di $|f_n(x)|$ al variare di $x \in [1, +\infty[$ tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$, quindi f_n converge uniformemente a 0 in $[1, +\infty[$.

2.

- a) Scrivere lo sviluppo di Taylor centrato in 0 della funzione $f(x) = 1/(1+x^2)$ precisando l'insieme di convergenza.
- b) Dedurre, integrando per serie, la serie di Taylor di $g(x) = \arctan x$ centrata in 0.

SOLUZIONE.

- a) La funzione f può essere vista come la somma della serie geometrica di ragione $-x^2$, che è una serie di potenze il cui raggio di convergenza è 1; inoltre per $x = \pm 1$ il termine generale della serie vale $(-1)^n$, pertanto la serie non converge. Dunque, l'insieme di convergenza è $] -1, 1[$ e si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in] -1, 1[.$$

- b) Per ogni $x \in] -1, 1[$ si ha

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^x t^{2n} dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} :$$

l'integrazione per serie è possibile poiché se $x \in] -1, 1[$ allora la serie converge uniformemente nell'intervallo che ha per estremi 0 e x .

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$y'(x) = \frac{x}{x^2 - 1} y^2(x),$$
$$y(0) = y_0.$$

- a) Si determini la soluzione per $y_0 = 0$ e si dica quale è il suo intervallo massimale di definizione.
- b) Si determini la soluzione per $y_0 = 1$ e si dica quale è il suo intervallo massimale di definizione.
- c) Detto (a, b) l'intervallo massimale di definizione della soluzione y per $y_0 = 1$, si calcoli $\lim_{x \rightarrow a^+} y(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} y(x)$.

SOLUZIONE. Osserviamo preliminarmente che il secondo membro dell'equazione differenziale fa intervenire la funzione $f(x, y) = xy^2/(x^2 - 1)$, che è definita e continua in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, y), y \in \mathbb{R}\} \cup \{(-1, y), y \in \mathbb{R}\}$; vista la condizione iniziale assegnata, converrà restringere f alla striscia $B =]-1, 1[\times \mathbb{R}$: osserviamo tuttavia che il teorema di esistenza in grande non si applica, poiché la condizione di Lipschitz è soddisfatta solo localmente.

- a) La funzione nulla, definita in $] -1, 1[$ è evidentemente una soluzione del problema di Cauchy ed è l'unica, grazie al teorema di unicità locale.
- b) Poiché $y_0 = 1$, la soluzione del problema di Cauchy non può annullarsi (se ciò avvenisse in un certo $x_0 \in] -1, 1[$, allora in un intorno di x_0 avremmo trovato una soluzione che non è identicamente nulla, violando l'unicità locale). Pertanto, la soluzione può essere trovata per separazione delle variabili:

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \log|x^2 - 1| + C, \quad y(x) = \frac{-2}{\log(1 - x^2) + K},$$

dove C e K sono costanti arbitrarie (non indipendenti). Imponendo la condizione iniziale risulta $K = -2$, dunque

$$y(x) = \frac{-2}{\log(1 - x^2) - 2}$$

funzione definita in $] -1, 1[$.

- c) Poiché $]a, b[=] -1, 1[$, occorre calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{\log(1 - x^2) - 2} = 0.$$

Il limite $\lim_{x \rightarrow -1^+} y(x)$ vale anch'esso 0 perché y è simmetrica.