Calcolo 3 - 23 marzo 2009

1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{2+nx^2} + \frac{1}{1+(x-n)^2}.$$

i) Determinare il limite puntuale f della successione di funzioni f_n.
ii) La convergenza di f_n a f è uniforme su $\mathbf{R}$?
iii) È uniforme su $[0,\infty)$?
iv) È uniforme su $[a,\infty)$ per $a>0$?
v) È uniforme su [a,b] per $0<a<b<\infty$?
Giustificare le risposte.

Soluzione: i) La successione di funzioni f_n converge puntualmente su $\mathbf{R}$ alla funzione $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ii) & iii) La successione di funzioni f_n non converge uniformemente a f né su $\mathbf{R}$ né su $[0,\infty)$, poiché la funzione limite f non è continua.

iv) Sia $a>0$ fissato. La successione di funzioni f_n non converge uniformemente a f su $[a,\infty)$. Infatti per ogni $n \geq a$ si trova che

$$\sup_{x\in[a,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,\infty)} f_n(x) \geq f_n(n) \geq 1$$

e pertanto $\sup_{x\in[a,\infty)} |f_n(x) - f(x)|$ non converge a 0.

v) Siano $0<a<b<+\infty$ fissati. La successione di funzioni f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$. Infatti per $n \geq b$ si trova

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} f_n(x) \leq \frac{1}{2+na^2} + \frac{1}{1+(b-n)^2}$$

e quindi $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ converge a 0.

2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + (1+2x)y = e^{-x^2} \\ y(1) = e, \end{cases}$$

i) discutere a priori l'esistenza e l'unicità in grande e/o in piccolo della soluzione;
ii) determinare la soluzione in forma esplicita.

Soluzione: i) Poiché l'equazione differenziale considerata è lineare ed i suoi coefficienti sono funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbf{R}$, per ogni dato iniziale $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ vale il teorema di esistenza ed unicità in piccolo. Inoltre ogni soluzione può essere prolungata fino ad essere definita su tutto $\mathbf{R}$.

ii) La soluzione generale dell'equazione lineare omogenea associata all'equazione differenziale considerata è data da

$$y_h(x) = ke^{-x-x^2}, \qquad k \in \mathbf{R}.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale considerata si usa il metodo di variazione delle costanti, e si trova così

$$y_p(x) = e^{-x^2}$$

.

La soluzione generale dell'equazione differenziale considerata quindi è data da

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x-x^2} + e^{-x^2}, \qquad k \in \mathbf{R}.$$

Sostituendo il valore della condizione iniziale si trova infine $k = e^3 - e$, ovvero $y(x) = (e^3 - e)e^{-x-x^2} + e^{-x^2}$.

3. Date le due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left[n \log \frac{n}{n+1} + \log n \right]$$

(nella prima, x è un generico numero reale), discuterne la convergenza semplice e assoluta e, se possibile, determinare la somma.

Soluzione: i) La serie in esame é una serie di potenze, in cui il coefficiente del termine x^n é $a_n = \frac{n+1}{n!}$. Segue che il raggio di convergenza della serie di potenze in esame é $+\infty$, e quindi si ha convergenza semplice ed assoluta per ogni $x \in \mathbf{R}$. Inoltre

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dx}\left(x^{n+1}\right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) = \frac{d}{dx}\left(xe^x\right) = e^x + xe^x. \end{aligned}$$

ii) La serie in esame é una serie telescopica, infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left[n \log \frac{n}{n+1} + \log n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\log n}{n} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)} \right].$$

Poiché $\dfrac{\log 1}{1} = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$ si trova allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\log n}{n} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)} \right] = \frac{\log 1}{1} - \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0.$$

Per discutere la convergenza assoluta delle serie in esame, consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\log n}{n} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)} \right|.$$

Poiché la funzione $g(x) = \frac{x}{\log x}$ è decrescente per $x > e$ e crescente per $x < e$ troviamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\log n}{n} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)} \right| &= \frac{\log 2}{2} + \left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 2}{2} \right) + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{\log n}{n} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 2}{2} \right).\end{aligned}$$

La serie converge quindi anche assolutamente.