Calcolo 3 - 6 aprile 2009

1. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{t^2-1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

i) Discutere a priori l'esistenza e l'unicità in piccolo della soluzione.
La funzione $f(t, y) = \frac{y^2}{t^2-1}$ è continua e localmente Lipschitziana in y uniformemente rispetto a t sul dominio

$$A := \{(t, y) \in \mathbf{R}^2 \mid t \neq \pm 1\}.$$

Poichè il punto $(0, 1)$ che assegna la condizione iniziale appartiene ad A, per il teorema di esistenza ed unicità locale di Cauchy si ha esistenza in piccolo di un'unica soluzione.

ii) Determinare le eventuali soluzioni costanti dell'equazione differenziale.
Si ha $\frac{y^2}{t^2-1} \equiv 0$ per ogni t sse $y = 0$. Si trova così la soluzione costante $y_0(t) \equiv 0$, definita per $t \neq \pm 1$.

iii) Discutere a priori la prolungabilità della soluzione a $[0, 1[$.
La soluzione del problema assegnato soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1 > 0$. Dato che per il teorema di esistenza ed unicità locale di Cauchy due soluzioni distinte della equazione non si possono intersecare (per $t \neq \pm 1$), avremo che $y(t) > 0$ per ogni $t \in [0, 1)$ per cui essa è definita. Dall'equazione differenziale si vede allora che tale soluzione è decrescente. Essendo $y(t)$ decrescente e limitata dal basso da $y_0(t) \equiv 0$, essa risulta necessariamente definita per ogni $t \in [0, 1)$.

iv) Determinare la soluzione del problema di Cauchy in forma esplicita.
Per separazione delle variabili si trova

$$\int_1^y \frac{dr}{r^2} = \int_0^t \frac{ds}{s^2 - 1},$$

e quindi integrando

$$-\frac{1}{y} + 1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right|.$$

Risolvendo rispetto ad y, e ricordando che la condizione iniziale è assegnata in $t = 0$, si trova così

$$y(t) = \frac{2}{2 - \ln\left(\frac{1-t}{t+1}\right)}.$$

2. Data l'equazione differenziale

$$y'' + y' - 2y = e^{-x} + e^{x}$$

i) discutere a priori l'esistenza e l'unicità in grande e/o in piccolo delle soluzioni.

Essendo l'equazione considerata lineare a coefficienti costanti con termine non omogeneo di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, per ogni condizione iniziale assegnata esiste ed è unica una soluzione definita su tutto $\mathbf{R}$ del corrispondente problema di Cauchy.

ii) Determinare la soluzione generale in forma esplicita.

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione in esame sono date da

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x},$$

con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Poichè 1 è una radice del polinomio caratteristico mentre -1 non lo è, si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea assegnata della forma

$$y_p(x) = ae^{-x} + bxe^x.$$

Sostituendo nell'equazione si trova così $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$.

La soluzione generale dell'equazione assegnata è allora data da

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{3}xe^x,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

3. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}(x-3)^n,$$

con $\alpha \geq 1$.

i) Nel caso $\alpha = 1$, determinare gli insiemi in cui la serie converge semplicemente, quelli in cui la serie converge assolutamente e quelli in cui la serie converge uniformemente.

Per $\alpha = 1$ la serie considerata è una serie di potenze centrata in 3 e con raggio di convergenza r dato da

$$r^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Segue che tale serie converge semplicemente ed assolutamente in $(2,4)$ ed uniformemente su ciascun intervallo $[a,b] \subset (2,4)$. La serie inoltre non converge per $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$. Per $x = 2$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

che non converge, mentre per $x = 4$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

che non converge assolutamente ma converge semplicemente per il criterio di Leibnitz.

Per il teorema di Abel la serie converge uniformemente in ogni intervallo $(a,4]$ con $a \in (2,4)$.

ii) Nel caso $\alpha > 1$, determinare gli insiemi in cui la serie converge semplicemente, quelli in cui la serie converge assolutamente e quelli in cui la serie converge uniformemente.

Per $\alpha > 1$ la serie considerata è una serie di potenze centrata in 3 e con raggio di convergenza r dato da

$$r^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = 1.$$

Segue che tale serie converge semplicemente ed assolutamente in $(2,4)$ ed uniformemente su ciascun intervallo $[a,b] \subset (2,4)$. La serie inoltre non converge per $x \in (-\infty,2) \cup (4,\infty)$. Per $x = 2$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

che converge semplicemente ed assolutamente essendo $\alpha > 1$, mentre per $x = 4$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha},$$

che ancora converge semplicemente ed assolutamente.

Per il teorema di Abel la serie converge uniformemente in $[2,4]$.

iii) Dire se per $\alpha > 1$ è valida l'uguaglianza

$$\int_3^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}(x-3)^n \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_3^4 \frac{(-1)^n}{n^\alpha}(x-3)^n \, dx.$$

iv) L'uguaglianza del punto precedente vale per $\alpha = 1$?

Poichè per ogni $\alpha \geq 1$ la serie converge uniformemente in $[3,4]$ l'uguaglianza considerata è valida.