Mario Sitta

Elementi di Fisica per Educatori Professionali

Facoltà di Scienze M. F. N.

Università del Piemonte Orientale – Alessandria

`Mario Sitta`
`    Elementi di Fisica per Educatori Professionali`
`Edizione 1.0, Novembre 2004`

L'Autore può essere contattato presso
Facoltà di Scienze M. F. N., Via Bellini 25g, 15100 Alessandria, Italy

Questo testo è stato composto usando Plain TEX e con l'aiuto di alcune 'macro' sviluppate dall'Autore.

Introduzione

Lo scopo del corso di Fisica all'interno del Corso di Laurea in Educazione Professionale è di presentare agli studenti gli aspetti fondamentali di questa scienza sperimentale, fornendo loro una base culturale ampia e aperta a possibili aggiornamenti. Anche se il numero di ore di lezione frontale non consente che una panoramica sommaria, si cerca di coprire tutti i principali ambiti dalla Meccanica alla Termodinamica all'Elettromagnetismo, con l'intento di fornire agli studenti gli strumenti per la comprensione della "filosofia" della Fisica e stimolando negli stessi la curiosità per eventuali approfondimenti.

Il presente testo è una raccolta delle lezioni svolte durante il corso che il docente ha tenuto nell'Anno Accademico 2004–2005 presso la sede didattica di Novara. Questa raccolta non intende in alcun modo sostituirsi ad un libro di testo, nè lo potrebbe: il suo unico scopo è quello di affiancarsi e integrare gli appunti raccolti dagli studenti durante le lezioni. L'uno e gli altri devono servire quale guida nello studio, per selezionare sul libro di testo gli argomenti trattati a lezione e valutarne il livello di approfondimento. Un buon libro di testo resta un ausilio insostituibile nella preparazione dell'esame di Fisica.

Mario Sitta, Alessandria, Novembre 2004

Capitolo I

Richiami di matematica

In questo Capitolo vengono richiamati alcuni concetti di matematica di base, che saranno utilizzati in seguito.

§ 1.1 Monomi e polinomi

Un *monomio* è un'espressione algebrica contenente solo prodotti e quozienti (il segno di moltiplicazione è sottinteso); ad esempio

$$5ab \qquad 2x^2y^3 \qquad \frac{p}{2q}$$

Un *binomio* è dato dalla somma o differenza di due monomi, come ad esempio

$$2a + 3b \qquad 10x + 6y^3$$

Così un *trinomio* è dato dalla somma o differenza di tre monomi, e in generale un *polinomio* dalla somma o differenza di un numero n generico di monomi.

Una *potenza* è il prodotto di più fattori uguali; il fattore è detto *base*, mentre il numero di volte per cui è moltiplicato è detto *esponente*: ad esempio

$$a \times a = a^2 \qquad 3^2 = 9$$

$$b \times b \times b = b^3 \qquad 5^3 = 125$$

$$\underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{n} = p^n \qquad 2^8 = 256$$

Proprietà delle potenze:

$$a^p \times a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Si dice *grado di un monomio* la somma delle potenze dei suoi fattori: ad esempio $5ab$ è un monomio di secondo grado mentre $2x^2y^3$ è un monomio di quinto grado. Il grado di un monomio può essere espresso anche relativamente ad uno solo dei suoi fattori: così $2x^2y^3$ è un monomio di secondo grado in x e di terzo grado in y.

Si dice *grado di un polinomio* quello del monomio di grado più alto: per esempio $2a + 3b$ è un binomio di primo grado, mentre $10x + 6y^3z$ è un binomio di quarto grado (di primo grado in x, di terzo grado in y e primo grado in z).

§ 1.2 Equivalenze ed equazioni

Si dice *equivalenza* un'espressione con la quale si esprime l'uguaglianza di due quantità (due polinomi), come

$$3 + 2 = 5 \qquad \text{(numerica)}$$

$$a + b = c^2 \qquad \text{(algebrica)}$$

Proprietà delle equivalenze:

1) sommando una stessa quantità ai due membri di una equivalenza, l'equivalenza non cambia

$$X = Y \Longrightarrow X + a = Y + a$$

2) moltiplicando i due membri di una equivalenza per una stessa quantità diversa da zero, l'equivalenza non cambia

$$X = Y \Longrightarrow a \times X = a \times Y$$

(ricordando la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

$$a\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots) = ax_1 + ax_2 + ax_3 + \ldots \qquad)$$

Si dice *equazione* una equivalenza in cui un termine è incognito. Di seguito si tratteranno esclusivamente equazioni con una sola incognita.

Equazioni di primo grado: compare solo la x: ad esempio

$$3x + 2 = 7 - 5x$$

sommando $5x$ ad entrambi i membri

$$8x + 2 = 7$$

sottraendo 2 ad entrambi i membri

$$8x = 5$$

dividendo entrambi i membri per 8

$$x = \frac{5}{8}$$

Equazioni di secondo grado: compaiono solo x e x^2; occorre portarle nella forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

da cui due soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

reali se $b^2 - 4ac \geq 0$. Ad esempio, l'equazione

$$2x - 4 = 5x - 3x^2 - 2$$

può essere messa nella forma

$$3x^2 + 7x - 2 = 0$$

e ha soluzioni

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 24}}{6} = \frac{7}{6} \pm \frac{\sqrt{73}}{6}$$

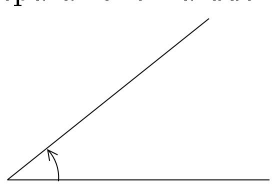
Invece l'equazione

$$4x^2 - 2x + 7 = 0$$

non ha soluzioni reali in quanto $b^2 - 4ac = 4 - 112 = -108 < 0$.

§ 1.3 Angoli

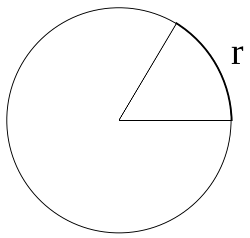
L'angolo è una misura della separazione fra due rette concorrenti



Le unità di misura degli angoli più usate sono i gradi sessagesimali e i radianti:

gradi sessagesimali: si divide l'angolo giro (ossia l'intera circonferenza) in 360 parti uguali, ognuna delle quali rappresenta l'ampiezza di un grado; inoltre vengono definiti il *minuto primo* come 1/60 di grado ed il *minuto secondo* come 1/60 di minuto primo

radianti: si divide l'angolo giro in 2π parti; quindi un radiante è l'angolo sotteso da un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza

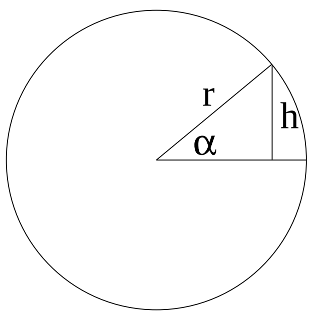


Valori notevoli:

angolo retto	1/4 circonf.	90°	$\frac{\pi}{2}$ rad
angolo piatto	1/2 circonf.	180°	π rad
—	1/8 circonf.	45°	$\frac{\pi}{4}$ rad
—	1/12 circonf.	30°	$\frac{\pi}{6}$ rad
—	1/6 circonf.	60°	$\frac{\pi}{3}$ rad

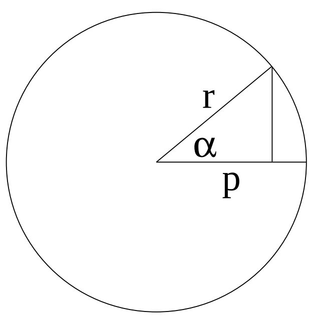
Vi sono alcune funzioni fondamentali che hanno come argomento un angolo:

— *seno di un angolo*: è il rapporto tra la perpendicolare h ed il raggio del cerchio r



$$\sin\alpha = \frac{h}{r}$$

— *coseno di un angolo*: è il rapporto tra la proiezione p ed il raggio del cerchio r



$$\cos\alpha = \frac{p}{r}$$

— *tangente di un angolo*: è il rapporto fra seno e coseno, ovvero tra la perpendicolare e la proiezione

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{h}{p}$$

Si dimostra facilmente dalla loro definizione che

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \quad \cos\alpha$$

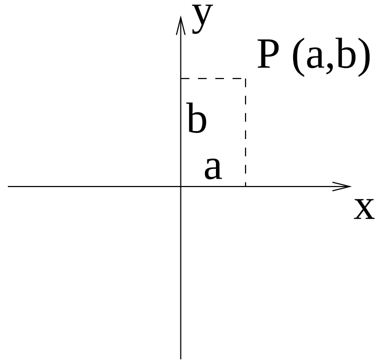
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

Casi notevoli:

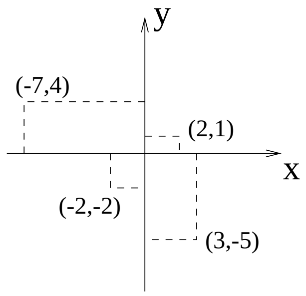
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$0°$	0	1	0
$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	∞

§ 1.4 Coordinate cartesiane

La gran parte delle considerazioni di fisica verteranno su figure piane. Occorre quindi un metodo per poter identificare e localizzare tutti i punti di un piano. Il più semplice è costituito dalle *coordinate cartesiane*: sul piano si tracciano due rette ortogonali; il punto di incontro è considerato l'origine del sistema. L'asse orizzontale è detto *asse delle ascisse* o *delle* x, quello verticale *asse delle ordinate* o *delle* y. Su ogni asse si stabilisce una scala di misura (generalmente, ma non necessariamente, uguale). Dopodiché ogni punto viene localizzato dalla sua distanza dagli assi: per localizzare il punto P di coordinate (a, b) è sufficiente spostarsi di un tratto a lungo l'asse delle x e di un tratto b lungo l'asse delle y



Nella figura seguente sono riportate come esempio le posizioni dei punti di coordinate $(2, 1)$, $(3, -5)$, $(-7, 4)$, $(-2, -2)$



§ 1.5 Funzioni

Una *funzione* è una relazione fra due o più variabili. Essa può essere espressa in forma *implicita* quando è nella forma

$$f(x, y, z, \ldots) = 0$$

dove $f(x, y, z, \ldots)$ è un generico polinomio in x, y, eccetera, oppure in forma *esplicita* quando viene messa in evidenza una variabile

$$y = f(x, z, \ldots)$$

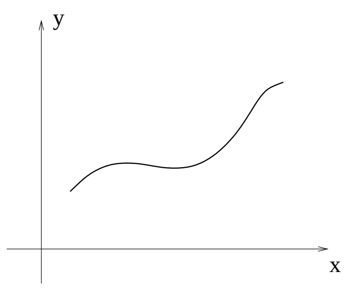
In quest'ultimo caso le variabili x, z eccetera sono dette *variabili indipendenti* giacché il loro valore può essere scelto in modo arbitrario, mentre la variabile y è detta *variabile dipendente* poiché il suo valore non è libero ma è determinato dai valori delle variabili indipendenti tramite il legame funzionale f.

Nel seguito verrano prese in esame solo le funzioni di una sola variabile e ad un sol valore

$$y = f(x)$$

funzioni cioè che dipendono da una sola variabile indipendente x e che per ogni valore di quest'ultima forniscono un solo valore della variabile dipendente y.

L'insieme delle coppie $(x, y = f(x))$ riportate sul piano cartesiano formano il *grafico* della funzione f

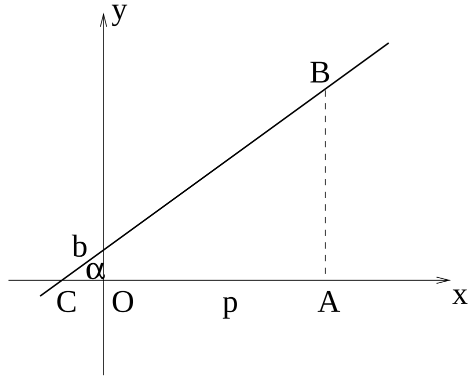


Casi notevoli: le seguenti funzioni compaiono assai spesso nella descrizione dei fenomeni fisici

retta: è una funzione del tipo

$$y = ax + b$$

(cioè un polinomio di primo grado in x) ed ha grafico



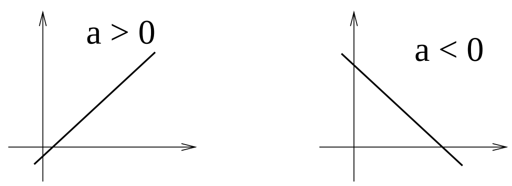
b rappresenta l'ordinata del punto che ha ascissa $x = 0$; per capire il significato di a si consideri un punto A posto ad una distanza p dall'origine O (ovvero di coordinate $(p, 0)$). Il punto B sulla retta avrà anch'esso ascissa p e ordinata $ap + b$, giacché si trova sulla retta. Si vuole conoscere il valore del rapporto $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$, dove C è il punto di intersezione della retta con l'asse delle y e quindi ha ordinata 0. Il segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ è lungo $ap + b$ mentre $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AO}} + \overline{\mathrm{OC}} = p + \overline{\mathrm{OC}}$. Ma $\overline{\mathrm{OC}}$ è determinato dal fatto che in C è $y = 0$, quindi

$$ax + b = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -\frac{b}{a}$$

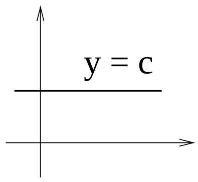
per cui $\overline{\mathrm{AC}} = p + \frac{b}{a}$. Allora

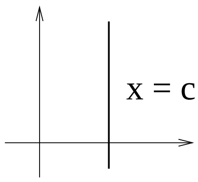
$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{ap + b}{p + \frac{b}{a}} = a$$

e poiché $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \tan\alpha$, a rappresenta la tangente dell'angolo di inclinazione della retta: per questo viene detto *coefficiente angolare*; esso dà una indicazione di quanto sia inclinata la retta. Tale inclinazione varia col segno di a



Rette particolari

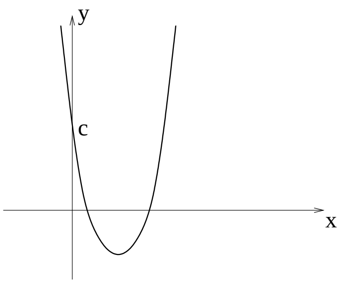




parabola: è una funzione del tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

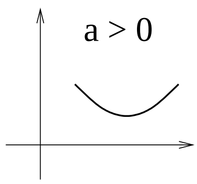
(cioè un polinomio di secondo grado in x) ed ha grafico

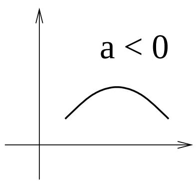


Il parametro c è la coordinata del punto di intersezione con l'asse y (cioè a $x = 0$); le intersezioni della parabola con l'asse delle x sono date invece dalle soluzioni dell'equazione

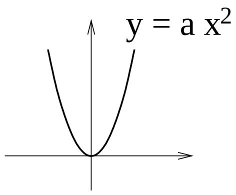
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Il segno di a determina l'orientamento della concavità della parabola





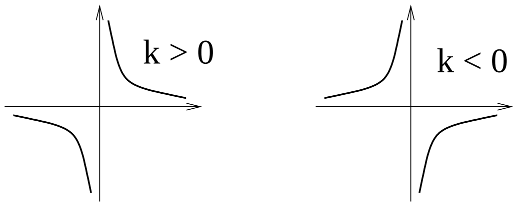
Parabola particolare



iperbole equilatera: è una funzione del tipo

$$xy = k \qquad \text{ovvero} \qquad y = \frac{k}{x}$$

(con k costante) ed ha grafico

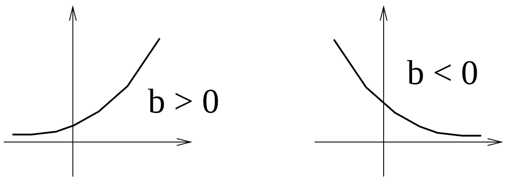


il segno di k determina la posizione dell'iperbole; non è definita in $x = 0$ e non esiste alcun x per cui $y = 0$.

esponenziale: è una funzione del tipo

$$y = a\mathrm{e}^{bx}$$

dove $e = 2.7182818284590 45\ldots$ è il *numero di Nepero*, un numero irrazionale (cioè decimale illimitato non periodico, come ad esempio π). Il suo grafico è



Capitolo II

Grandezze fisiche

§ 2.1 Grandezze fisiche

Ogni grandezza fisica deve essere definita attraverso un processo di misura (definizione operativa). Date due grandezze omogenee, deve sempre essere possibile stabilire se sono uguali o quale delle due sia maggiore e quale minore. Scelta una particolare grandezza come unità campione, la misura consiste nel determinare il rapporto fra la grandezza da misurare ed il campione. Esempio: la lunghezza di un tavolo.

Fino all'avvento della meccanica quantistica si riteneva che l'operazione di misura potesse essere effettuata senza influenzare il sistema misurato, almeno in via teorica. Ciò non è così ovvio, ed anzi in generale è vero il contrario: ogni volta che si effettua una misura, essa riguarda il sistema "oggetto da misurare+strumento di misura". Ad esempio, per misurare la temperatura di un volume d'acqua si deve immergere in esso un termometro, il quale però scambia calore con la massa d'acqua variandone la temperatura, cosicché alla fine la temperatura misurata è quella del sistema "acqua+termometro" e non della sola acqua. Si riteneva tuttavia che con opportuni artifizi tecnici si potesse ridurre a piacere tale influenza sino a renderla sempre trascurabile. La meccanica quantistica invece ha mostrato come esista un limite teorico invalicabile all'influenza dell'operazione di misura sul sistema misurato. Tuttavia questo limite, pur sempre presente, è determinante solo quando si tratti di sistemi microscopici, mentre a livello macroscopico il suo impatto è trascurabile.

La descrizione dei fenomeni fisici è di tipo matematico. Per *legge fisica* si intende una relazione matematica fra due o più grandezze fisiche. Tale relazione è sempre frutto di prove sperimentali, ed è ritenuta valida finché un nuovo esperimento non dimostri il contrario. Si assume che valga il principio in base al quale se una legge fisica è valida devono essere valide tutte le conseguenze matematiche che derivano da tale legge: se anche una sola risulta sperimentalmente non verificata, anche la legge di partenza non può essere valida.

2.1.1 Grandezze fisiche e unità di misura

Per ogni grandezza fisica è necessario stabilire una *unità di misura*, ovvero una grandezza omogenea scelta come campione: il valore di una grandezza sarà allora il rapporto fra questa grandezza e l'unità campione. Si può decidere di adottare unità indipendenti per ciascuna grandezza, ma questa scelta è scomoda dal punto di vista operativo. Si preferisce allora scegliere alcune unità di misura, dette *unità fondamentali*, come grandezze indipendenti: le altre, dette *unità derivate*, vengono determinate a partire dalle leggi fisiche che le legano alle grandezze fondamentali. Ad esempio, poiché l'area di una superficie è sempre in qualche modo legata al prodotto di due unità di lunghezza, è inutile scegliere una unità campione indipendente per l'area, giacché la si può definire a partire dall'unità campione della lunghezza.

La scelta delle unità di misura è in qualche modo arbitraria, e si tende a scegliere quelle la cui determinazione sperimentale garantisce un più alto grado di riproducibilità e affidabilità. Questa scelta costituisce un *sistema di unità di misura*.

Il sistema standard solitamente utilizzato nella Fisica moderna è il *Sistema Internazionale* (*SI*): esso sceglie come unità fondamentali la lunghezza, la cui unità è il metro (m), il tempo, la cui unità è il secondo (s), la massa, con unità il kilogrammo (kg), l'intensità di corrente, con unità l'ampere (A), e l'intervallo di temperatura, con unità il grado Kelvin (°K) (alcune altre grandezze vengono definite come fondamentali, ma sono meno essenziali). Di ognuna di esse viene pure definita con estrema precisione come riprodurre l'unità campione. Un altro sistema di unità di misura adottato in passato è il *sistema CGS* o *di Gauss*, che adotta come unità fondamentali la lunghezza, con unità il centimetro (cm), il tempo, con unità il secondo (s), la massa, con unità il grammo (g), e l'intervallo di temperatura, con unità il grado Celsius (°C) (in questo sistema le unità elettriche sono derivate dalle sole unità meccaniche).

Oltre alle unità di misura vengono definiti pure i loro multipli e sottomultipli, in potenze di 10, che facilitano l'espressione di misure molto grandi o molto piccole rispetto all'unità di misura. In tabella sono riportati i fattori di conversione dei multipli e sottomultipli adoperati nel SI

Tabella 2.1 Sottomultipli e multipli del Sistema Internazionale.

Sottomultipli			Multipli		
Nome	Simbolo	Valore	Nome	Simbolo	Valore
deci	d	10^{-1}	deca	da	10^{1}
centi	c	10^{-2}	etto	h	10^{2}
milli	m	10^{-3}	chilo	h	10^{3}
micro	μ	10^{-6}	mega	M	10^{6}
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^{9}
pico	c	10^{-12}	tera	T	10^{12}
femto	f	10^{-15}	peta	P	10^{15}

§ 2.2 Grandezze scalari e vettoriali

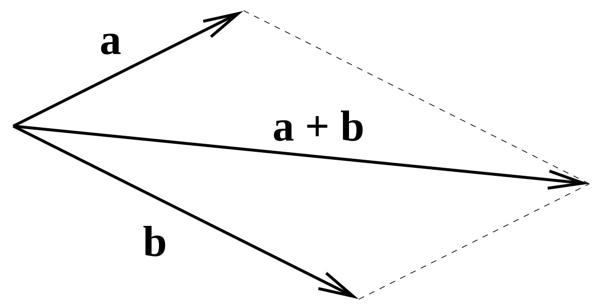
Per alcune grandezze fisiche è sufficiente fornire il loro valore per determinarle senza ambiguità. Ad esempio, se si dice che in un certo punto della stanza c'è una temperatura di 20°C, questa informazione è sufficiente per stabilirne il significato fisico. Ciò non è vero per tutte le grandezze: se per esempio si afferma di aver effettuato uno spostamento di 2 metri, questa informazione non è sufficiente da sola a determinare la posizione finale dopo lo spostamento. In questo caso occorre specificare anche la direzione, la retta lungo cui avviene tale spostamento; e poiché su una retta sono possibili due versi opposti, è necessario esplicitare pure il verso dello spostamento: solo con la conoscenza di questi tre elementi è possibile determinare il significato fisico dell'affermazione fatta, cioè la posizione finale dopo lo spostamento.

Le grandezze che sono univocamente determinate dalla sola conoscenza della loro intensità vengono dette *grandezze scalari*: ne sono un esempio il tempo, la massa, la temperatura, la carica elettrica. Le grandezze che per essere univocamente determinate richiedono l'indicazione della loro intensità (detta *modulo*), della loro direzione e del loro verso vengono dette *grandezze vettoriali*: ne sono un esempio lo spostamento, la velocità, la forza, il campo elettrico. I primi sono rappresentati da numeri, i secondi da vettori.

2.2.1 Somma di vettori; prodotto scalare; prodotto vettoriale

La somma di due scalari omogenei è banalmente la somma algebrica dei loro valori. Analogamente il prodotto di due grandezze scalari è una nuova grandezza scalare il cui valore è il prodotto dei valori delle grandezze scalari date.

La somma di due vettori omogenei è invece più complessa, ed è data dal vettore che giace sulla diagonale del parallelogramma determinato dai due vettori addendi (*regola del parallelogramma*)



La somma così definita gode della proprietà associativa, per cui dati tre vettori

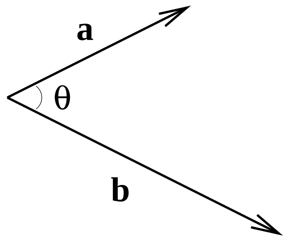
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Il prodotto di un vettore per uno scalare è dato da un vettore avente la stessa direzione e lo stesso verso, e modulo pari al prodotto del modulo del vettore di partenza per il valore dello scalare. In particolare il vettore -**a** è un vettore che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di **a** e verso opposto. Ciò permette di definire pure la differenza di due vettori come la somma del primo vettore per l'opposto del secondo

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

E' possibile definire due tipi di prodotto fra vettori, a seconda che il risultato finale sia uno scalare o un nuovo vettore. Il *prodotto scalare* (o *prodotto interno*) di due vettori è uno scalare dato dal prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo compreso fra loro

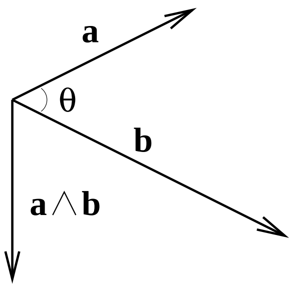
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\ b\ \cos\vartheta$$



Il prodotto scalare è simmetrico: scambiando **b** con **a** il valore del prodotto scalare non cambia. Il prodotto scalare è nullo se uno dei due vettori è nullo, ma anche se pur essendo entrambi non nulli sono però perpendicolari, in quanto si ha $\vartheta = \pi/2$ e quindi $\cos\vartheta = 0$.

Il *prodotto vettoriale* (o *prodotto esterno*) di due vettori è un vettore* la cui direzione è perpendicolare al piano contenente i due vettori di partenza, il cui modulo è dato dal prodotto dei due moduli per il seno dell'angolo compreso fra loro, e il cui verso è dato dalla "regola della mano destra": aprendo pollice, indice e medio in modo che siano fra loro perpendicolari, se il pollice corrisponde al verso del primo vettore e l'indice al verso del secondo, il dito medio indica il verso del prodotto

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = a\ b\ \sin\vartheta$$

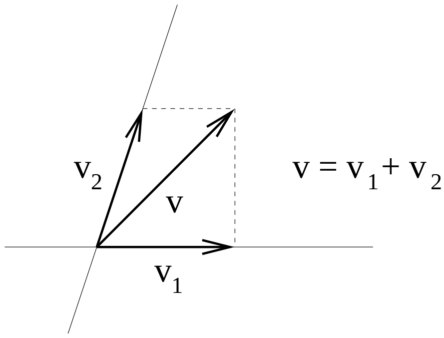


Il prodotto vettoriale è antisimmetrico: scambiando **b** con **a** il verso del vettore prodotto si inverte, com'è facile verificare usando la regola della mano destra. Il prodotto vettoriale è nullo se uno dei due vettori è nullo, ma anche se pur essendo entrambi non nulli sono però paralleli, in quanto si ha $\vartheta = 0$ e quindi $\sin\vartheta = 0$.

2.2.2 Componenti di un vettore in assi cartesiani

Si definisce *versore* di un vettore un vettore avente la stessa direzione e lo stesso verso del vettore dato e modulo unitario. Dato il vettore **a** il suo versore $\hat{\mathbf{a}}$ è dato dal rapporto fra **a** e il valore assoluto del suo modulo: $\hat{\mathbf{a}} = {}^{\mathbf{a}}\!/_{|a|}$.

* A rigore, uno pseudovettore.



Date due direzioni nello spazio, identificate dai versori $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$, è possibile proiettare un vettore $\mathbf{v}$ su di esse, ottenendo due vettori la cui somma è pari al vettore di partenza Ciascuna componente è un vettore diretto lungo il versore del proprio asse e avente come modulo il prodotto scalare di $\mathbf{v}$ con il versore

$$\mathbf{v_1} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = v_1\hat{\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{v_2} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})\hat{\mathbf{b}} = v_2\hat{\mathbf{b}}$$

v_1 e v_2 sono dette *componenti* del vettore $\mathbf{v}$. Analogamente avviene se si hanno tre direzioni indipendenti.

Risulta comodo scegliere come direzioni lungo cui scomporre un vettore una terna di assi cartesiani XYZ, i cui versori sono indicati nell'ordine con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Le componenti di un vettore vengono dette allora *componenti cartesiane*.

Dati due vettori $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ è immediato verificare le seguenti relazioni:

- nella somma di due vettori le componenti del vettore somma sono date dalla somma delle componenti dei vettori addendi: il vettore somma $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ avrà componenti $v_x = a_x + b_x$, $v_y = a_y + b_y$ e $v_z = a_z + b_z$; analogamente la differenza di due vettori ha come componenti la differenza delle componenti dei due vettori di partenza;
- il prodotto di un vettore per uno scalare $\mathbf{v} = k\mathbf{a}$ è un vettore che ha per componenti il prodotto delle componenti per lo scalare $v_x = ka_x$, $v_y = ka_y$ e $v_z = ka_z$;
- il prodotto scalare di due vettori è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe di ciascun vettore: infatti, tenendo conto che i versori degli assi cartesiani sono ortogonali tra loro e di modulo unitario, si ha che $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ e

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$, e poiché il prodotto è distributivo rispetto alla somma, si ottiene

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

– il modulo di un vettore è dato dalla radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

– il prodotto vettoriale è un vettore che ha per componenti la differenza dei prodotti incrociati delle componenti non omologhe di ciascun vettore: infatti, tenendo conto che i versori degli assi cartesiani sono ortogonali tra loro e di modulo unitario, si ha che $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0$ e $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$, e poiché il prodotto è distributivo rispetto alla somma, si ottiene

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k}$$

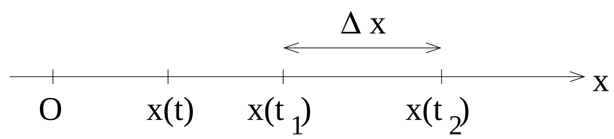
Capitolo III

Cinematica

§ 3.1 Moto in una dimensione

La cinematica studia i moti indipendentemente dalle loro cause. Il corpo soggetto al moto è il *punto materiale*, una astrazione per cui si trascurano le dimensioni del corpo che per l'appunto viene considerato puntiforme.

Si consideri innanzitutto il moto in una dimensione, cioè solamente lungo l'asse x: la posizione del punto $x = x(t)$ sarà una funzione del tempo t



Se il punto materiale occupa la posizione $x_1 = x(t_1)$ all'istante t_1 e la posizione $x_2 = x(t_2)$ all'istante t_2, allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ lo spostamento del punto materiale sarà pari a $\Delta x = x_2 - x_1$. Si definisce *velocità media* il rapporto

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocità media però non è molto indicativa dello svolgimento del moto; se tuttavia si prendono intervalli di tempo Δt sempre più piccoli, si ottengono informazioni sempre più dettagliate. Si definisce allora *velocità istantanea* il limite per Δt che tende a zero (cioè per intervalli di tempo infinitesimi) della velocità media.

Essendo un rapporto fra uno spazio ed un tempo, la velocità è una grandezza derivata, e nel SI si misura in m/s.

Anche la velocità è in generale una funzione del tempo $v = v(t)$. Se all'istante t_1 la velocità del punto materiale è $v_1 = v(t_1)$ e all'istante t_2 è $v_2 = v(t_2)$, il rapporto fra la variazione della velocità $\Delta v = v_2 - v_1$ e l'intervallo di tempo Δt si definisce *accelerazione media*

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Essa indica la variazione media di velocità nell'intervallo di tempo considerato. Anche questa quantità non è di per sè particolarmente significativa, ma di nuovo se si prendono intervalli di tempo Δt sempre più piccoli, si ottengono informazioni sempre più dettagliate. Si definisce allora *accelerazione istantanea* il limite per Δt che tende a zero (cioè per intervalli di tempo infinitesimi) dell'accelerazione media; essa indica la variazione istantanea della velocità all'istante di tempo considerato.

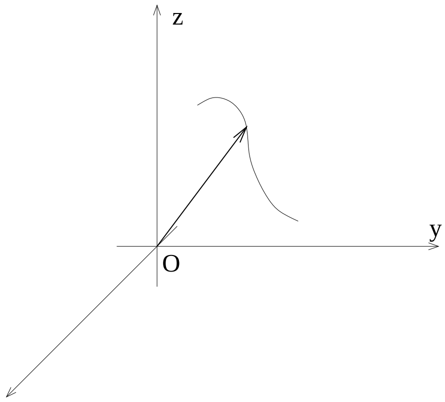
Essendo un rapporto fra una velocità ed un tempo, anche l'accelerazione è una grandezza derivata, e nel SI si misura in m/s^2.

Pure l'accelerazione è in generale una funzione del tempo $a = a(t)$. Si potrebbe pensare allora di proseguire costruendo il rapporto $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ e così via. Si vedrà però trattando della Dinamica che le cause del moto sono legate alla sola accelerazione, e quindi la conoscenza dell'accelerazione in funzione del tempo è sufficiente a ricostruire il moto di un corpo.

Data l'accelerazione $a(t)$ ad ogni istante, la velocità del punto materiale si ottiene per integrazione diretta; nota la velocità $v(t)$ ad ogni istante, la posizione del punto materiale si ottiene mediante una nuova integrazione.

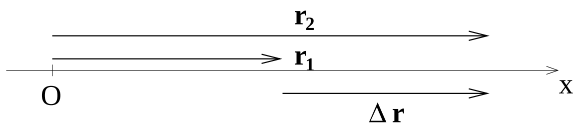
§ 3.2 Moto in una e in tre dimensioni con i vettori

In generale il moto di un corpo avviene nello spazio tridimensionale. Si consideri allora una terna di assi cartesiani ortogonali: in questo sistema di riferimento la posizione istante per istante del corpo può essere indicata da un vettore $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, detto per l'appunto *vettore posizione*, funzione del tempo



3.2.1 Moto lungo un asse

Si consideri prima un caso semplice, in cui il moto avviene lungo l'asse X: in questo caso il vettore posizione giace sempre sull'asse delle ascisse. Se all'istante t_1 la posizione del punto materiale è identificata dal vettore $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ e all'istante t_2 dal vettore $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$, si può definire il *vettore spostamento* $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ che indica di quanto e in che direzione si è spostato il punto in esame nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$



(per chiarezza i tre vettori sono disegnati separati, ma ovviamente devono essere pensati tutti sullo stesso asse X). In maniera analoga al caso unidimensionale, si definisce *velocità media* il rapporto

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

esso è ovviamente un vettore, essendo dato da un vettore ($\Delta\mathbf{r}$) moltiplicato per uno scalare ($1/\Delta t$), ed ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\Delta\mathbf{r}$ cioè lungo l'asse X. Se poi si fa tendere Δt a zero, da questo rapporto si ottiene la *velocità istantanea* $\mathbf{v}_i$, la quale è anch'essa un vettore avente stessa direzione e stesso verso di $\mathbf{r}$, ovvero lungo l'asse delle ascisse.

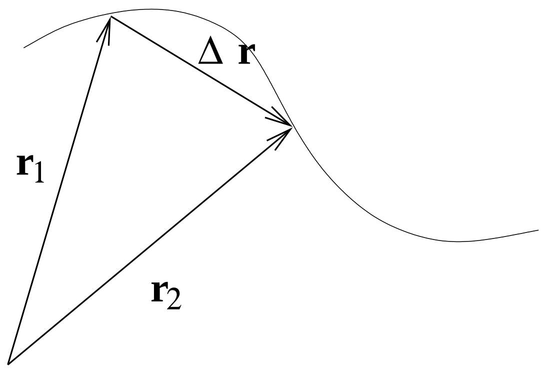
All'istante t_1 la velocità del punto materiale sia $\mathbf{v}_1$ e all'istante t_2 sia $\mathbf{v}_2$. Sempre in analogia al caso unidimensionale, il rapporto

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

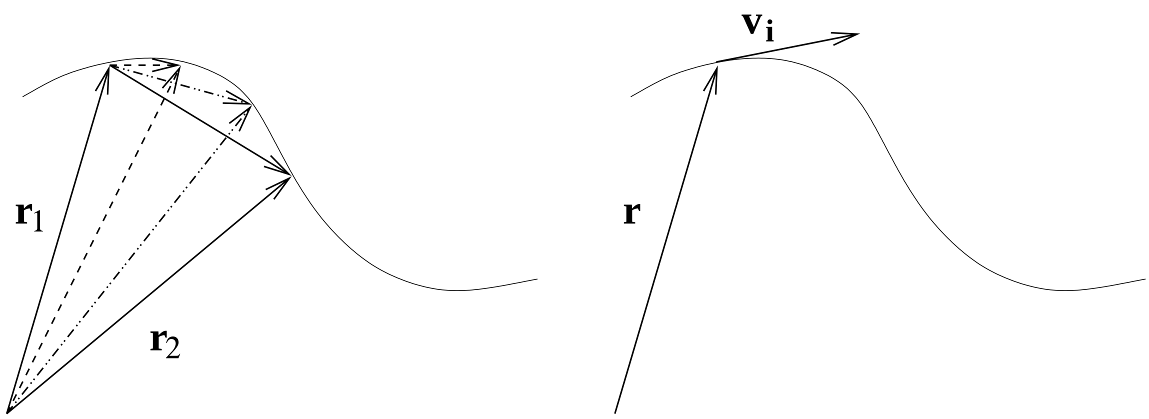
viene detto *accelerazione media*, ed è un vettore avente la stessa direzione di $\mathbf{v}$ (e quindi di $\mathbf{r}$), e lo stesso verso di $\mathbf{v}$ se la velocità mediamente aumenta nell'intervallo Δt, verso opposto se la velocità mediamente diminuisce. Il limite per Δt che tende a zero è la *accelerazione istantanea* $\mathbf{a}_i$, che ha anch'essa stessa direzione di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}$, e verso concorde oppure opposto al verso di $\mathbf{v}$ a seconda che la velocità aumenti o diminuisca all'istante t.

3.2.2 Caso generale

In generale il moto avviene lungo una curva generica (detta *traiettoria del moto*). E' però ancora possibile definire il vettore spostamento $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, se $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ sono le posizioni del punto materiale a due istanti t_1 e t_2

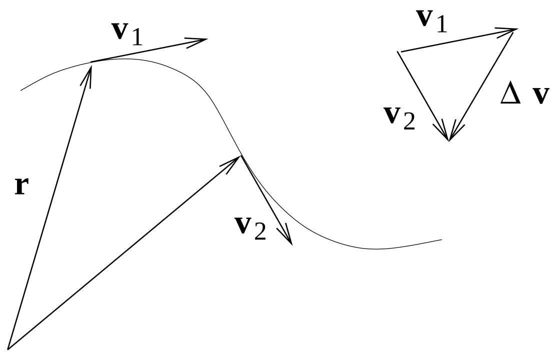


Il rapporto $\mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ esprime ancora la velocità media del punto materiale, ed è ancora un vettore, anche se ora ha direzione indipendente da quella di $\mathbf{r}$. Il limite per Δt che tende a zero è ancora il vettore velocità istantanea $\mathbf{v}_i$; esso ha una direzione particolare: si nota infatti che al tendere di Δt a zero, e quindi al tendere di $\mathbf{r}_2$ verso $\mathbf{r}_1$, il vettore $\Delta\mathbf{r}$ tende ad essere tangente alla traiettoria



e in effetti è possibile dimostrare matematicamente che il vettore velocità istantanea è sempre tangente alla traiettoria nel punto considerato

All'istante t_1 la velocità del punto materiale è rappresentata dal vettore $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1)$, mentre all'istante t_2 essa è data dal vettore $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(t_2)$. Si può allora definire il vettore variazione di velocità $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$

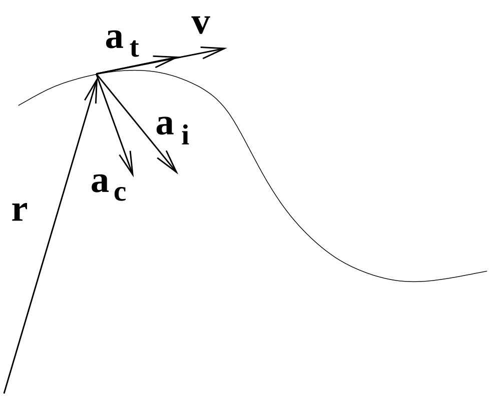


e quindi il vettore accelerazione media $\mathbf{a}_m = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$: esso è un vettore avente la stessa direzione e lo stesso verso di $\Delta\mathbf{v}$. Il suo limite per Δt che tende a zero è il vettore accelerazione istantanea. Esso non ha una direzione particolare (a differenza del vettore velocità istantanea che è sempre tangente alla traiettoria), ma è comunque sempre diretto verso la concavità interna della curva.

Il vettore accelerazione istantanea si può scomporre in due componenti

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c$$

il primo termine è l'*accelerazione tangenziale* ed esprime la variazione del modulo del vettore velocità, il secondo è l'*accelerazione centripeta* ed esprime la variazione della direzione del vettore velocità



Infatti essendo la velocità un vettore, può cambiare sia in modulo sia in direzione: le due componenti dell'accelerazione rappresentano questi due contributi.

§ 3.3 Composizione dei moti

Finora si è considerato il caso di un punto materiale sottoposto ad un solo moto. Tuttavia è possibile che uno stesso punto sia soggetto a più moti contemporaneamente: in questo caso il moto complessivo sarà uguale alla somma dei moti componenti, ovvero la posizione ad un certo istante dovuta al moto complessivo è la stessa che il corpo avrebbe se fosse sottoposto a tutti i moti componenti uno alla volta.

Un caso particolarmente importante è quello in cui il punto materiale è soggetto a due moti su uno stesso asse. In questo caso istante per istante si ha $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$; per semplice derivazione si ottiene allora

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \qquad \text{e} \qquad a(t) = a_1(t) + a_2(t)$$

cioè così come i moti anche le velocità e le accelerazioni si sommano*.

§ 3.4 Moti particolari

3.4.1 Moto rettilineo uniforme

Il moto rettilineo uniforme è caratterizzato dall'avere velocità costante come vettore, $\mathbf{v} = \text{cost}$: pertanto

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0$$

Pertanto il moto avviene lungo una retta, data dalla direzione di $\mathbf{v}$. Si tratta di un moto unidimensionale, quindi per semplicità si può scegliere uno degli assi del sistema di riferimento lungo la direzione del moto: in tal modo le equazioni si semplificano in

$$v = \text{cost}$$

$$x(t) = vt + x_0$$

dove x_0 è la posizione del punto materiale all'istante iniziale.

---

* Ciò non è più vero nella meccanica relativistica, cioè quando le velocità in gioco sono comparabili con la velocità della luce.

3.4.2 Moto uniformemente accelerato

Nel moto uniformemente accelerato è invece il vettore accelerazione a mantenersi costante, $\mathbf{a} = \text{cost}$. Particolarmente importante è il moto rettilineo uniformemente accelerato: allora anche in questo caso il moto avviene lungo una retta. Si può scegliere allora uno degli assi del sistema di riferimento lungo la direzione del moto: in tal modo accelerazione e velocità sono date da

$$a = \text{cost}$$

$$v(t) = at + v_0$$

dove v_0 è la velocità lineare del punto materiale all'istante iniziale. Per conoscere la posizione si può seguire questo ragionamento: dopo un tempo t la velocità media del punto è

$$v_m = \frac{v + v_0}{2} = \frac{(at + v_0) + v_0}{2} = \frac{at}{2} + v_0$$

lo spazio percorso sarà di conseguenza

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

dove x_0 è la posizione del punto materiale all'istante iniziale.

Nel caso particolare in cui $v_0 = 0$, cioè se il corpo parte da fermo, si hanno alcune relazioni notevoli (si scelga opportunamente il sistema di riferimento in modo tale che sia $x_0 = 0$): il tempo necessario a percorrere un tratto s è dato dalla soluzione dell'equazione

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

ovvero

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

mentre la velocità acquisita dal punto materiale dopo un tratto s è

$$v = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2as}$$

Formule analoghe, ovviamente più complesse, valgono nel caso in cui la velocità iniziale non sia nulla.

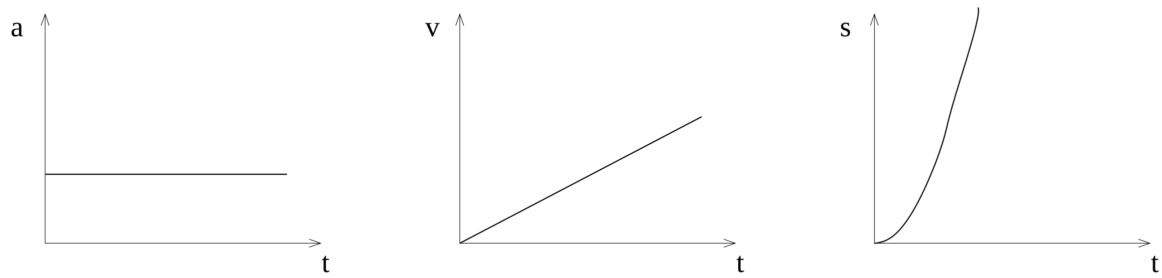
Un esempio particolarmente importante è la caduta libera di un grave sulla superficie terrestre: il grave si muove con accelerazione costante pari all'accelerazione di gravità $g = 9.8\ m/s^2$. Allora, supponendo che il corpo parta da fermo all'istante $t_0 = 0$ si ha

$$a(t) = g \quad \text{cost}$$

$$v(t) = gt$$

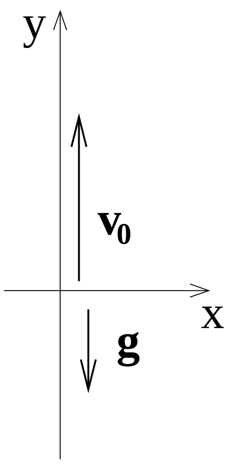
$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

L'andamento della velocità è lineare nel tempo, l'andamento dello spostamento è parabolico



3.4.3 Moto di un grave verso l'alto

Si è già studiata l'equazione del moto di un grave in caduta libera verso il basso. Si supponga ora di lanciare un grave verso l'alto con una velocità iniziale v_0: se si sceglie come riferimento un asse verticale diretto verso l'alto e con l'origine nel punto in cui, all'istante



$t_0 = 0$, viene lasciato il grave, ad ogni istante la velocità del punto materiale sarà data da

$$v = v_0 - gt$$

e la posizione da

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Il grave inizialmente sale, con velocità sempre decrescente, fino a fermarsi. E' possibile determinare l'altezza massima a cui sale: infatti a tale altezza il grave si ferma, quindi $v = 0$; ciò avviene all'istante $t_1 = \frac{v_0}{g}$, il che corrisponde a

$$h = y(t_1) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

Quindi il grave comincia a cadere di moto accelerato. L'istante in cui ripassa per l'origine, cioè per il punto dal quale era stato lanciato, si può ricavare dall'equazione

$$y(t_2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0$$

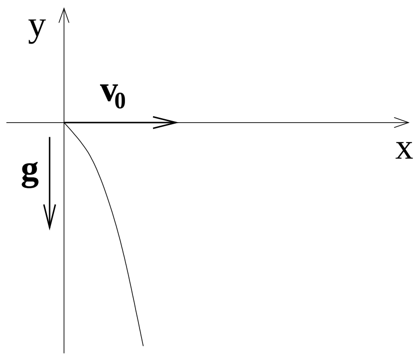
che ha due soluzioni, $t_2 = 0$, che in realtà corrisponde all'istante iniziale, e $t_2 = \frac{2v_0}{g}$, cioè il doppio di t_1: pertanto il tempo $t_2 - t_1$ che il grave impiega a cadere dal punto di massima altezza h al punto da cui era stato lanciato è pari al tempo impiegato dal grave a salire dal punto di lancio al punto di massima altezza. Inoltre la velocità che il grave possiede quando ripassa dall'origine vale

$$v_2 = v(t_2) = v_0 - g t_2 = -v_0$$

essa è pari in valore assoluto alla velocità con cui era stato lanciato, ed ha ovviamente verso opposto.

3.4.4 Moto parabolico

Invece che verso l'alto, si supponga di lanciare un grave orizzontalmente con velocità v_0: esso sarà sottoposto allora a due moti, uno rettilineo uniforme lungo l'asse X ed uno rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse Y



Infatti l'accelerazione di gravità g agisce solo lungo la direzione delle ordinate e non ha alcun effetto lungo le ascisse: quindi la componente X della velocità rimane costante. Allora i due moti cui è sottoposto il punto materiale sono dati da

$$v_x = v_0 \qquad ; \qquad x = v_0 t$$

e

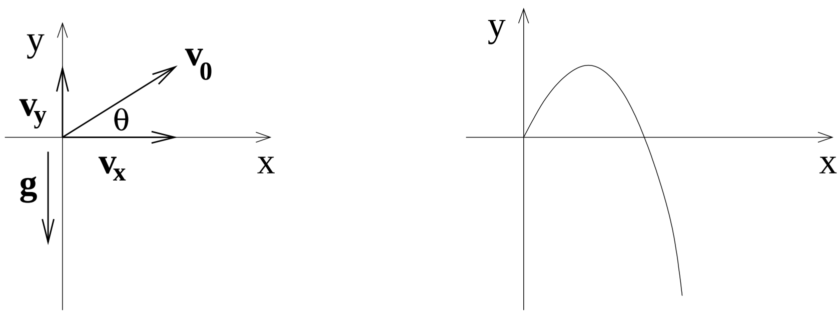
$$v_y = -gt \qquad ; \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2$$

Per ottenere l'equazione della traiettoria è sufficiente eliminare la variabile t dalle due equazioni del moto: dalla prima si ottiene $t = x/v_0$, che sostiuita nella seconda fornisce

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2 = ax^2 \qquad , \qquad a < 0$$

si tratta quindi di una parabola passante per l'origine e avente la concavità rivolta verso il basso.

Come caso più generale, si supponga di lanciare il grave con una certa velocità $\mathbf{v}_0$ formante un angolo ϑ con l'orizzontale



in questo caso si ha la composizione di due moti rettilinei, uno uniforme lungo l'asse X con velocità costante $v_x = v_0 \cos\vartheta$, ed uno uniformemente accelerato lungo l'asse Y con velocità iniziale $v_y = v_0 \sin\vartheta$ diretta verso l'alto. Infatti anche in questo caso l'accelerazione di gravità g agisce solo lungo la direzione delle ordinate e non ha alcun effetto lungo le ascisse: quindi la componente X della velocità rimane costante. Allora i due moti cui è sottoposto il punto materiale sono dati da

$$v_x = v_0 \cos\vartheta \qquad ; \qquad x = v_0 \cos\vartheta \; t$$

e

$$v_y = v_0 \sin\vartheta - gt \quad ; \quad y = v_0 \sin\vartheta \; t - \frac{1}{2}gt^2$$

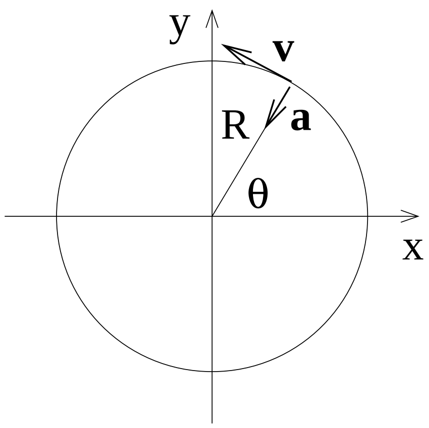
Di nuovo per ottenere l'equazione della traiettoria è sufficiente eliminare la variabile t dalle due equazioni del moto: dalla prima si ottiene $t = x/v_0 \cos\vartheta$, che sostituita nella seconda fornisce

$$y = \tan\vartheta \; x - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_0 \cos\vartheta)^2}x^2 = ax^2 + bx \quad , \quad a < 0$$

quindi nuovamente una parabola passante per l'origine e avente la concavità rivolta verso il basso, ma con un tratto verso l'alto. In maniera analoga a quanto fatto nel caso del lancio di un grave verso l'alto, è possibile determinare l'altezza massima raggiunta dal punto materiale; inoltre è semplice ricavare l'ascissa del punto in cui il grave tocca nuovamente terra (la cosiddetta *gittata*).

3.4.5 Moto circolare uniforme

Il moto circolare è quello seguito da un punto materiale che si muove su una circonferenza di raggio R



L'angolo $\vartheta = \vartheta(t)$ che il raggio vettore forma con la direzione positiva dell'asse delle X è in generale una funzione del tempo. Analogamente al caso lineare, si può definire una *velocità angolare media*, cioè il tasso di variazione dell'angolo ϑ in un dato intervallo di tempo

$$\omega_m = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{t_2 - t_1}$$

e al limite per intervalli di tempo infinitesimi una *velocità angolare istantanea* ω.

Anche $\omega = \omega(t)$ è in generale una funzione del tempo: si può allora definire una *accelerazione angolare media* come variazione nel tempo della velocità angolare (in analogia all'accelerazione lineare)

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

ed una *accelerazione angolare istantanea*.

Se però il punto materiale descrive archi uguali in tempi uguali, ovvero se la velocità angolare ω è costante, allora il moto circolare è detto uniforme.

La velocità lineare del punto materiale sulla circonferenza è un vettore **v** sempre tangente alla circonferenza e di modulo

$$v = R\omega$$

quindi è un vettore di modulo costante. L'accelerazione poi è un vettore diretto verso il centro del cerchio: infatti la componente tangenziale dell'accelerazione è nulla, $\mathbf{a}_t = 0$, poichè il modulo della velocità è costante. Rimane quindi la sola componente centripeta, di modulo

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Si noti che pur essendo un moto uniforme, la velocità non è costante e l'accelerazione non è nulla: infatti ciò che è costante è solo il modulo della velocità, ma si tratta di un vettore la cui direzione nello spazio varia da punto a punto, e quindi non è un vettore costante; l'accelerazione poi ha solo componente centripeta, il cui effetto è appunto quello di modificare la direzione del vettore velocità senza mutarne il modulo.

Se il moto circolare è uniforme, la velocità angolare ω è costante, e pari a

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

dove T è il *periodo*, cioè il tempo necessario a compiere un giro completo; la velocità angolare si misura in *rad/s*. Si definisce *frequenza* del moto circolare uniforme l'inverso del periodo, ovvero il numero di giri completi nell'unità di tempo

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Capitolo IV

Dinamica. Le forze

§ 4.1 Le forze

Di forza si ha un concetto intuitivo, come pure dei suoi effetti: se si applica uno "sforzo" su un corpo, questo si mette in moto oppure si deforma. Movimento e deformazione sono i classici effetti di una forza.

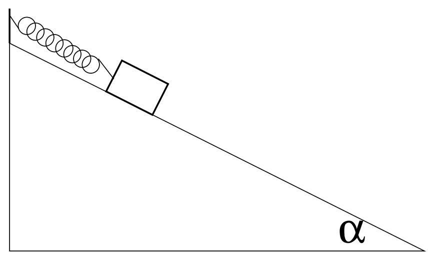
Chiaramente però è necessaria una definizione precisa e riproducibile di forza. Per farlo concettualmente si usa la deformazione di una molla campione. Infatti applicando una forza ad una molla, questa si allunga: allora per definizione due forze si diranno uguali se provocano lo stesso allungamento; e se l'allungamento è diverso, si dirà più grande quella forza che provoca l'allungamento maggiore. Si possono così confrontare le forze. Si sceglie poi una forza campione, per esempio quella prodotta dal peso di un dato corpo. E' quindi possibile misurare le forze usando una molla tarata in questo modo (che prende il nome di *dinamometro*).

§ 4.2 I principî della dinamica

La Dinamica si occupa di studiare le cause del moto. Essa si basa su tre principî fondamentali, definiti con rigore da Newton, anche se già anticipati in qualche modo da Galileo.

Apparentemente l'osservazione sperimentale sembra confermare l'idea aristotelica secondo cui ogni corpo abbandonato a se stesso tende a fermarsi, e per mantenerlo in moto è necessario applicargli una forza. Ma ciò in realtà è dovuto al fatto che sulla Terra agiscono degli attriti, cioè delle forze che tendono ad opporsi al moto: sono queste che fermano un corpo in movimento. Se si cerca di eliminare questi impedimenti, si osserva che il corpo tende a muoversi sempre più a lungo a velocità costante. Tecnicamente non è possibile eliminare tutti gli attriti, ma si osserva questa tendenza quanto più essi vengono diminuiti, tanto da poter ritenere che se venissero effettivamente eliminati tutti gli impedimenti, un corpo in moto non si arresterebbe mai. D'altra parte se un corpo è inizialmente fermo, non si mette in moto se non sotto l'azione di un qualche stimolo. Si arriva in questo modo ad enunciare il *primo principio della dinamica* o *principio di inerzia*: un corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se non interviene una causa esterna a modificarne lo stato.

Quando il moto non è uniforme, un qualche tipo di forza deve agire sul corpo. Per determinare l'effetto di una forza sul moto, si cominci col considerare una forza costante, la forza peso. Per poterne variare l'intensità in maniera semplice, si usa un piano inclinato di cui si possa modificare l'angolo di inclinazione, sul quale è libero di muoversi un dato corpo



Innanzitutto si sposti l'insieme corpo più molla in diverse posizioni lungo il piano inclinato: la molla tarata permette di verificare come la forza sia costante lungo tutto il piano. Quindi si lascia libero il corpo, che cade di moto uniformemente accelerato, e se ne misura l'accelerazione. Poi si varia l'angolo di inclinazione α del piano inclinato cambiando così l'intensità della forza che agisce sul corpo. Mediante la misura dell'allungamento della molla si verifica che l'intensità della forza è legata all'angolo di inclinazione dalla relazione

$$F = F_g \sin\alpha$$

come deve essere da semplici considerazioni geometriche; qui F_g è la forza peso quando il corpo è appeso verticalmente alla molla. Per varî angoli α_i si hanno diversi valori di forza

F_i agente sul corpo; per ognuno di essi il corpo acquista una accelerazione a_i diversa. Si verifica sperimentalmente che il rapporto fra l'intensità della forza cui è sottoposto il corpo e l'accelerazione che esso acquista è una costante

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \ldots = \frac{F_n}{a_n} = k$$

Questa costante è indipendente dalle condizioni del moto ed è una caratteristica del corpo: se si cambia il corpo in esame cambia la costante k ma rimane sempre vero che il rapporto F/a è una costante.

La costante di proporzionalità fra la forza (costante) che agisce su un corpo e l'accelerazione che questo acquista prende il nome di *massa inerziale*: essa è una caratteristica di ciascun corpo che esprime la sua riluttanza a mutare le proprie condizioni di moto, ed è una costante indipendente dalle condizioni di moto*. Si può sintetizzare questa relazione con l'espressione

$$F = ma$$

La massa è una grandezza fondamentale; nel SI la sua unità di misura è il *chilogrammo massa*. La forza invece è una grandezza derivata; nel SI la sua unità di misura è il *newton*: si dice che una forza ha l'intensità di 1 newton quando applicata ad una massa di 1 chilogrammo le imprime un'accelerazione di 1 m/s^2 nella direzione di applicazione.

Questa relazione è stata sperimentalmente dimostrata per forze costanti nel tempo quali la forza peso. In generale tuttavia la forza che viene applicata ad un corpo varia nel tempo e così l'accelerazione che esso acquista. Quando la forza è variabile non è sempre semplice misurarla per poter calcolare il suo rapporto con l'accelerazione prodotta; anzi nei casi più generali potrebbe pure non essere possibile. Inoltre nell'esempio della forza peso questa relazione è stata verificata per i moduli di forza e accelerazione, ma queste grandezze sono vettori dotati anche di direzione e verso. Allora si assume questa relazione come principio, per verificarne poi le sue conseguenze; finora tutte le evidenze sperimentali ne

* Ciò non è più vero nella meccanica relativistica, dove la massa diventa una funzione della velocità. Fintantoché però la velocità del corpo si mantiene ben al di sotto della velocità della luce, la massa di fatto può essere considerata costante.

confermano la validità. Il *secondo principio della dinamica* afferma allora che ogniqualvolta una forza agisce su un corpo il suo effetto è quello di produrre un'accelerazione nella stessa direzione e nello stesso verso della forza e con modulo pari al rapporto fra il modulo della forza e la massa del corpo

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Questa relazione viene anche detta equazione fondamentale della dinamica giacché permette di determinare il moto di un corpo quando sia nota la risultante delle forze che agiscono su di esso. Si spiega così perché non si definiscano altre grandezze oltre la velocità e l'accelerazione: le cause del moto, cioè le forze, agiscono modificando solo l'accelerazione del corpo cui sono applicate.

Quando due corpi interagiscono fra loro, il primo produce una forza sul secondo e questi a sua volta ne produce una sul primo. Il *terzo principio della dinamica* afferma che quando due corpi interagiscono la forza prodotta dal primo sul secondo è uguale e contraria (ovvero ha la stessa direzione, verso opposto e lo stesso modulo) alla forza prodotta dal secondo corpo sul primo. Questo principio, detto anche *di azione e reazione*, a volte viene sintetizzato con la frase "ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria"; pur essendo sostanzialmente vera, questa frase nella sua brevità rischia di essere fuorviante, perché può risultare non chiaro quale sia la reazione e soprattutto a quale corpo essa è applicata. La formulazione data ("la forza che un corpo esercita su un altro è uguale e contraria alla forza che il secondo corpo esercita sul primo") è invece meno ambigua e più corretta.

Si definisce *sistema isolato* un corpo sul quale non agisce alcuna forza, o più in generale un insieme di corpi sui quali non agiscono forze esterne (su di essi possono al più agire le forze reciproche dei corpi facenti parte del sistema, forze che a due a due sono uguali e contrarie per il terzo principio della dinamica).

§ 4.3 Esempi di forze

4.3.1 Forza costante

Come primo esempio di consideri una forza costante $\mathbf{F}$. Essa imprime al corpo una accelerazione costante avente la stessa direzione e lo stesso verso della forza e modulo

$$a = \frac{F}{m}$$

quindi il corpo si muove di moto uniformemente accelerato. E' quanto avviene per la forza peso: in questo caso, scelto un sistema di riferimento cartesiano avente l'asse Y verticale e diretto verso basso, si ha

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = mg\mathbf{j}$$

dove al solito $\mathbf{j}$ rappresenta il versore dell'asse delle ordinate. Il corpo lasciato libero si muove di moto uniformemente accelerato verso il basso, con accelerazione g: quindi si ha

$$F = mg$$

cui corrisponde l'equazione del moto

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

4.3.2 Forza dipendente dalla velocità

Si consideri ora il caso di una forza che dipenda dalla velocità del corpo. Questa tipo di forze si manifestano quando un corpo si muove in un mezzo viscoso, ad esempio un oggetto che cade in aria o nell'acqua: il mezzo oppone al moto una forza (di attrito) che è proporzionale alla sua velocità. Si immagini lo stesso corpo del caso precedente che cade verticalmente in un mezzo viscoso: la forza cui è sottoposto è pari a

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} - k\mathbf{v} = (mg - kv)\mathbf{j}$$

dove k è una costante di proporzionalità avente le dimensioni di

$$[k] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{kg\ m}{s^2}\frac{s}{m} = \frac{kg}{s}$$

per garantire che il prodotto kv abbia le dimensioni corrette di una forza. Si può dimostrare (per risoluzione delle equazioni differenziali che conseguono dal secondo principio della dinamica) che l'equazione del moto è del tipo

$$y(t) = A + \frac{mg}{k}t + C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

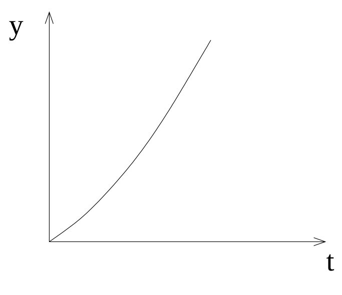
si noti che il fattore mg/k ha le dimensioni corrette di una velocità, in modo che moltiplicandolo per un tempo si ottenga una lunghezza, mentre il fattore k/m ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, cosicché moltiplicandolo per un tempo si ottiene un numero puro: infatti gli argomenti delle funzioni (come l'esponenziale, il seno, e così via) devono essere adimensionali. I parametri A e C rimangono indeterminati, dipendendo dalle condizioni iniziali. Il moto è quindi la composizione di un moto rettilineo uniforme e di un moto che si estingue esponenzialmente. Per piccoli valori di t, cioè nei primissimi istanti del moto, sviluppando in serie l'esponenziale si ha

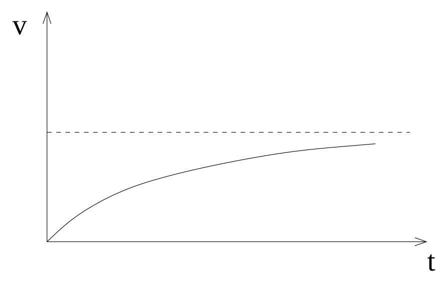
$$t \sim 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) \simeq A + \frac{mg}{k} t + C - C\frac{k}{m} t + C^2 \left(\frac{k}{m}\right)^2 t^2 = a + bt + ct^2$$

cioè all'inizio il moto è uniformemente accelerato: infatti essendo la velocità inizialmente piccola, la forza che le è proporzionale è trascurabile rispetto alla forza peso. Per grandi valori di t invece

$$t \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) \simeq A + \frac{mg}{k} t = a + bt$$

cioè il moto è rettilineo uniforme: infatti al crescere della velocità cresce anche la seconda forza, fino a compensare la forza peso; a quel punto la forza totale agente sul corpo è nulla e il moto prosegue rettilineo uniforme. Ciò si vede anche dall'espressione della velocità: a piccoli istanti $v \simeq a + bt$ e quindi cresce linearmente; a grandi istanti invece $v \simeq \frac{mg}{k}$ costante; questo valore prende nome di *velocità limite*. L'andamento della posizione e della velocità è qualitativamente





§ 4.4 Forza elastica

Alcuni materiali sottoposti ad una forza si deformano, e la loro deformazione è proporzionale all'intensità della forza applicata; quando la causa deformante cessa, essi riacquistano la forma originaria. Tali materiali vengono detti *elastici*.

Idealmente i materiali elastici seguono la *legge di Hooke*, secondo la quale la forza necessaria a provocare una data deformazione è linearmente proporzionale all'entità della deformazione; gli stessi materiali una volta deformati esercitano una forza che è proporzionale alla deformazione

$$F = -kx$$

(il segno meno significa che la forza si oppone alla deformazione). I materiali reali seguono la legge di Hooke solo per piccole deformazioni: quando la deformazione è notevole i materiali reali si discostano da tale relazione lineare, e una volta che cessa la causa deformante essi non riacquistano completamente la forma originaria. Nel seguito si considereranno solo piccole deformazioni tali per cui la legge di Hooke sia valida.

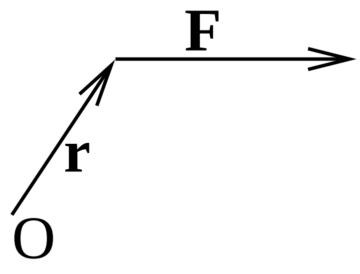
§ 4.5 Equilibrio delle forze

Due o più forze agenti su uno stesso corpo si dicono in equilibrio quando la loro risultante è nulla. Un sistema di corpi puntiformi è in equilibrio quando la somma delle forze agenti su ciascun corpo è nulla (ovvero quando ciascun corpo è in equilibrio).

4.5.1 Momento di una forza. Equlibrio dei corpi rigidi

Si definisce *momento di una forza* rispetto ad un punto O il prodotto vettoriale della forza per il vettore di posizione che congiunge il punto O al punto di applicazione della forza

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$$

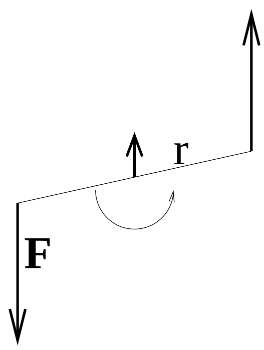


Il momento della forza ha quindi modulo

$$M = rF \sin \vartheta$$

dove ϑ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$.

Una forza applicata ad un corpo lo pone in moto uniformemente accelerato. Se due forze di modulo uguale e concorrenti, cioè non parallele, agiscono contemporaneamente sul corpo, questo si muove seguendo la risultante delle due forze. Se invece le stesse due forze uguali sono parallele fra loro, il loro effetto è quello di far ruotare il corpo attorno ad un asse che è dato proprio dalla direzione del momento $\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$, dove $\mathbf{r}$ è la distanza fra le due forze



Un corpo rigido è in equilibrio quando la risultante delle forze applicate al corpo stesso è nulla e il momento totale applicato al corpo è anch'esso nullo.

§ 4.6 Impulso e quantità di moto

Si supponga che una forza costante F agisca per un tempo t. Si definisce *impulso della forza* la quantità

$$I = Ft$$

Ora però $F = ma$, e quindi

$$I = Ft = mat = m(v - v_0) = mv - mv_0$$

Il prodotto $q = mv$ prende nome di *quantità di moto*: si è dimostrato così il *teorema dell'impulso* nel caso di forza costante

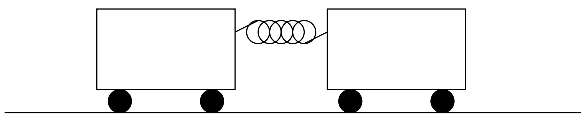
$$I = q_2 - q_1$$

ovvero quando una forza agisce per un certo periodo di tempo, il suo impulso è pari alla variazione della quantità di moto del corpo su cui la forza agisce. Questa relazione può essere generalizzata al caso di forza variabile, ed è particolarmente utile quando la forza varia rapidamente in un breve tempo, per cui è difficile conoscerne la forma $F(t)$ in maniera esatta.

Su un sistema isolato non agiscono forze esterne, quindi $F = 0$: ma allora

$$q_2 - q_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q_2 = q_1$$

ovvero in un sistema isolato la quantità di moto si conserva. Si consideri ad esempio un sistema costituito da due carrellini di massa m_1 e m_2 tenuti insieme da una molla in tensione



Quando la molla viene lasciata libera, i due carrellini sono spinti in direzioni opposte. Poiché però all'inizio era $q_{1_i} + q_{2_i} = 0$, anche dopo dovrà essere $q_{1_f} + q_{2_f} = 0$, ovvero

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

quindi i due carrellini si muoveranno in direzioni opposte con velocità inversamente proporzionali alle masse.

Per conoscere i valori di v_1 e v_2 tuttavia non è sufficiente la conservazione della quantità di moto: serve una seconda equazione, derivata da considerazioni energetiche.

Capitolo V

Lavoro e energia

§ 5.1 Lavoro

Si consideri una forza $\mathbf{F}$ costante che agisce per un tratto $\mathbf{s}$ rettilineo e parallelo ad essa: si definisce *lavoro della forza* F *lungo* s il prodotto scalare

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs$$

Se la forza è costante ma non parallela allo spostamento, si avrà

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs \cos \vartheta$$

essendo ϑ l'angolo tra la direzione della forza e la direzione dello spostamento. Più in generale, se la forza non è costante, oppure se lo spostamento non è rettilineo, si consideri un tratto infinitesimo lungo il quale la forza si possa considerare costante; si definisce *lavoro elementare* il prodotto scalare della forza per lo spostamento infinitesimo, e *lavoro totale* la somma dei lavori infinitesimi.

In generale il lavoro totale dipende dalla forma del cammino, cioè dal percorso seguito per spostarsi dal punto di partenza al punto di arrivo.

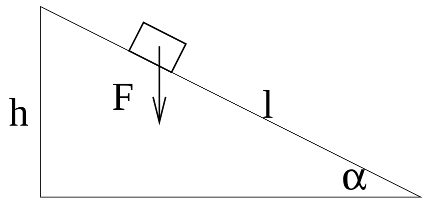
Se il lavoro L è positivo si dice che la forza compie un *lavoro motore* sul corpo sulla quale agisce, se è negativo si dice che compie un *lavoro resistente* o anche che il corpo compie lavoro *contro* la forza $\mathbf{F}$.

Nel SI l'unità di misura del lavoro è il *joule*, che è il lavoro compiuto da una forza di 1 newton che sposta il suo punto di applicazione di 1 metro: $1J = 1N \times 1m$.

Come esempio si consideri la forza gravitazionale: se un peso di massa m cade sotto l'azione della forza peso per un tratto h, il lavoro compiuto dalla forza peso è pari a

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{h} = Fh = mgh$$

Se invece la massa m cade lungo un piano inclinato lungo l e alto h



si ha

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l} = F \sin \alpha \; l$$

infatti $F \sin \alpha$ è la proiezione di $\mathbf{F}$ su l; quindi

$$L = Fl \sin \alpha = mgl \sin \alpha = mgh$$

si è così ottenuto lo stesso risultato della caduta verticale.

§ 5.2 Potenza

Se un certo lavoro L viene compiuto in un tempo Δt si definisce *potenza media* il rapporto

$$W_m = \frac{L}{\Delta t}$$

Al solito, se si prendono intervalli di tempo Δt sempre più piccoli, si ottengono informazioni sempre più dettagliate. Quando il tempo t diventa infinitesimo, il rapporto fra il lavoro corrispondente (anch'esso infinitesimo) ed il tempuscolo t è detto *potenza istantanea*. Nel SI la potenza si misura in *watt*: 1 watt è la potenza fornita da una forza in grado di compiere il lavoro di 1 joule in 1 secondo: $1W = 1J/1s$.

§ 5.3 Energia cinetica

Si consideri il lavoro compiuto da una forza **F** costante su un corpo di massa costante m che si sposta di un tratto s parallelamente alla forza

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs$$

ora $F = ma$ e $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ (potendosi trascurare la posizione iniziale s_0), quindi

$$L = \frac{1}{2}ma^2t^2 + matv_0 = \frac{1}{2}m(at)^2 + m(at)v_0$$

Ora però

$$at = v - v_0$$

per un moto uniformemente accelerato; pertanto sostituendo e svolgendo i calcoli rimane

$$L = \frac{1}{2}m(v - v_0)^2 + m(v - v_0)v_0 =$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - mvv_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 + mvv_0 - mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Si ricordi che v_0 è la velocità del corpo nel punto iniziale (dove cioè comincia l'azione della forza) e v è la velocità nel punto finale (dove finisce l'azione della forza).

La quantità $K = \frac{1}{2}mv^2$ prende nome di *energia cinetica.* Il calcolo appena svolto mostra in un caso particolare (forza costante e spostamento parallelo alla forza) che il lavoro compiuto da una forza su un corpo di massa m è pari alla variazione della sua energia cinetica: è questo il *teorema dell'energia cinetica* (o *teorema delle forze vive*, giacché la quantità $1/2\ mv^2$ era un tempo detta forza viva del corpo, nome oramai caduto in disuso). Esso in realtà può essere dimostrato per qualsiasi tipo di forza, anche variabile, e per qualsiasi spostamento, anche non rettilineo.

Questa relazione è molto importante in quanto consente di legare il lavoro di una forza, che può essere complicato da calcolare, ai soli stati iniziale e finale del sistema: conoscendo la velocità prima e dopo è possibile determinare il lavoro compiuto dalla forza.

Se la forza compie un lavoro motore, L è positivo e quindi il corpo aumenta la propria velocità; viceversa se il lavoro è resistente, L è negativo e il corpo rallenta. Questa osservazione fornisce una interpretazione molto importante del concetto di energia: essa può essere vista come la capacità di compiere un lavoro. Se una forza agisce su un corpo di massa m portandolo da fermo ad una velocità v, sul corpo è stato compiuto un lavoro L da parte della forza, e il corpo risulta possedere una energia cinetica $K = {}^1\!/_2\, mv^2$. Il corpo ha così immagazzinato la capacità di compiere un lavoro: infatti se successivamente il corpo compie un lavoro contro un'altra forza fino a fermarsi, ha speso questa energia compiendo un lavoro L pari alla sua energia cinetica. Se invece di fermarsi, passa da una velocità v ad una $v' < v$, ha speso solo parte della sua energia, e la restante parte resta accumulata e pronta a compiere nuovo lavoro. Allo stesso modo se una forza compie un lavoro su un corpo aumentandone la velocità, aumenta anche l'energia accumulata nel corpo, che quindi può compiere un lavoro maggiore.

Come esempio, si consideri un grave che cade in caduta libera verticale di un tratto h partendo da fermo: allora il lavoro compiuto dalla forza peso è

$$L = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{h} = mgh$$

la velocità iniziale è $v_0 = 0$, e la velocità finale è $v = \sqrt{2gh}$, quindi

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(2gh) = mgh$$

cioè la variazione di energia cinetica è pari al lavoro della forza peso.

§ 5.4 Potenziale

Come si è detto, in generale il lavoro compiuto da una forza dipende dal cammino lungo cui ci si muove dal punto iniziale al punto finale. Ci sono però dei casi in cui il lavoro in realtà dipende solo dalla posizione iniziale e dalla posizione finale e non dal modo in cui ci si sposta da una all'altra posizione. Una forza il cui lavoro non dipende mai dal percorso ma solo dai punti iniziale e finale si dice *conservativa.* Matematicamente questo implica l'esistenza di una funzione V tale che

$$L = V(A) - V(B)$$

ovvero il lavoro è pari alla variazione di questa funzione fra i punti finale e iniziale. Tale funzione prende il nome di *energia potenziale* della forza conservativa **F**. L'energia potenziale in un punto A è data quindi da

$$V(A) = V(O) - L$$

Si noti come l'energia potenziale (come per altro anche la funzione V) dipende sempre da una costante arbitraria: infatti si possono conoscere solo le variazioni dell'energia potenziale, non il suo valore assoluto. D'altra parte poiché il lavoro non dipende dal percorso la costante $V(O)$ è sempre la stessa, e quindi può essere fissata una volta per tutte, e di solito si sceglie per comodità un valore nullo, $V(O) = 0$: con tale scelta allora

$$V(A) = -L$$

Ora il lavoro di una forza tra i punti A e B vale

$$L = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_f - K_i$$

ma se la forza è conservativa si ha anche

$$L = V(A) - V(B) = V_i - V_f$$

quindi

$$K_f - K_i = V_i - V_f$$

e pertanto

$$K_i + V_i = K_f + V_f$$

ovvero la somma delle energie cinetica e potenziale si mantiene costante. La quantità

$$E = K + V$$

prende nome di *energia meccanica* : pertanto se la forza è conservativa l'energia meccanica si conserva. Se la forza compie lavoro, l'energia cinetica aumenta a spese dell'energia potenziale, e viceversa se il corpo compie lavoro contro la forza. Questa legge di conservazione è di somma importanza, sia teorica che pratica, e consente la risoluzione di molti problemi.

5.4.1 *Lavoro della forza peso*

Come esempio si consideri il lavoro di una forza costante quale la forza peso. Si fissi un sistema di riferimento avente l'asse Y verticale e diretto verso l'alto. Si lasci cadere verticalmente una massa da una altezza y_1; quando arriva ad un'altezza $y_2 < y_1$ il lavoro della forza peso sarà

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs = mg(y_1 - y_2) = mgh$$

con $h = y_1 - y_2$, e considerando che $\mathbf{F}$ e $\mathbf{s}$ sono paralleli e $s = -y$ per come è stato orientato l'asse Y.

L'energia potenziale è data da

$$V(y) = -L = -mg(y_0 - y)$$

Per fissare la costante si suole porre a 0 l'energia potenziale alla quota $y_0 = 0$: allora rimane

$$V(y) = mgy$$

Il moto è rettilineo uniformemente accelerato, e la velocità che la massa assume dopo un tratto h è $v = \sqrt{2gh}$: pertanto la sua energia cinetica è

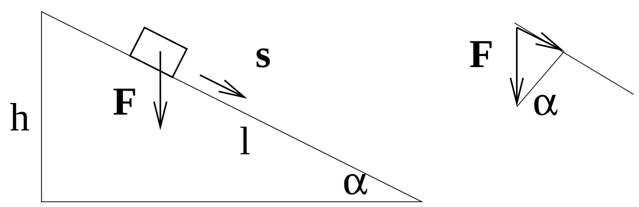
$$K_{y_1} = 0 \qquad , \qquad K_{y_2} = \frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

e quindi $\Delta K = \Delta V$, e anche

$$K_i + V_i = 0 + mgy_1 = mgy_1 = mg(h + y_2) = mgh + mgy_2 = K_f + V_f$$

mentre la massa cade parte della sua energia potenziale si converte in energia cinetica.

Invece che in verticale, si lasci cadere la massa lungo un piano inclinato formante un angolo α con l'orizzontale



In questo caso il lavoro compiuto dalla forza peso lungo tutto il piano inclinato vale

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs\ \cos(90 - \alpha) = Fs\ \sin\alpha = mgl \sin\alpha = mgh$$

essendo $F \sin\alpha$ la proiezione della forza lungo lo spostamento, come è immediato verificare da semplici considerazioni trigonometriche. Si noti che il lavoro lungo il piano inclinato è uguale al lavoro lungo la verticale: infatti la forza peso, come tutte le forze costanti, è conservativa e quindi il lavoro non dipende dal percorso ma solo dalle quote iniziale e finale. L'accelerazione in questo caso è $g \sin\alpha$, e quindi la velocità finale è $v = \sqrt{2g \sin\alpha\ l}$, da cui

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 = mgl \sin\alpha = mgh$$

In maniera analoga al caso precedente si ricava la conservazione dell'energia.

Se poi il grave viene lanciato verticalmente verso l'alto dalla quota $y_i = 0$ con velocità v_i, ad ogni istante della sua salita si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_i^2 + 0$$

e poiché $y > 0$ deve essere $v < v_i$: il corpo rallenta mentre sale verso l'alto. Ad un certo punto dovrà allora fermarsi: ciò avviene quando

$$mgy_{max} = \frac{1}{2}mv_i^2 \quad \Longrightarrow \quad y_{max} = \frac{v_i^2}{2g}$$

Il corpo non può salire più in alto: infatti se $y > y_{max}$ si avrebbe $\frac{1}{2}mv^2 + mgy > \frac{1}{2}mv_i^2$ e quindi $\frac{1}{2}mv^2 < 0$ il che è ovviamente assurdo. Quindi mentre il corpo sale aumenta la sua energia potenziale a spese della sua energia cinetica, finché questa si esaurisce. A questo punto il corpo inizia a scendere ritrasformando l'energia potenziale in energia cinetica. Quando ripassa per il punto $y = 0$ la sua velocità è tale che

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_i^2$$

il che implica $v = v_i$. Si osservi come siano state dedotte da sole considerazioni energetiche tutte le proprietà del moto già a suo tempo determinate da considerazioni cinematiche: queste ultime sono in genere più complesse (ad esempio, avevano richiesto la conoscenza dell'istante in cui il corpo si arresta o ripassa per l'origine), mentre le considerazioni energetiche sono spesso più semplici e immediate.

5.4.2 Conservazione dell'energia totale

Si è dimostrato che l'energia meccanica si conserva: questa è infatti una legge. Tuttavia oltre all'energia meccanica ci sono altre forme di energia, termica, elettrica, nucleare, eccetera, come si vedrà anche in seguito. Ci sono situazioni in cui l'energia meccanica non si conserva; ma se ad essa si sommano gli altri tipi di energia si osserva come questa quantità, che prende nome di *energia totale* rimane conservata. Si può allora enunciare il *principio di conservazione dell'energia totale*, secondo cui la somma di tutti i tipi di energia si conserva in qualsiasi caso. Esso è un principio, in quanto non è sempre possibile tener conto di tutti i possibili contributi; né si può escludere che esista una qualche forma di energia non ancora nota che non rispetta questa conservazione. Ciononondimeno finora in tutti gli esperimenti effettuati si è sempre verificata tale conservazione: essa quindi viene assunta come principio, valido finché non si sia dimostrata, direttamente o indirettamente, la sua non validità. Quale esempio si consideri che l'esistenza del neutrino è stata supposta dai fisici sulla sola base della conservazione dell'energia in reazioni nucleari che apparentemente sembravano violarla.

§ 5.5 Attrito

Finora sono stati visti esempi di forze conservative. Un esempio molto importante di forze non conservative è rappresentato dalle forze di attrito. Si tratta di forze che si oppongono al moto e sono causate dallo sfregamento di due superfici (in senso lato) che scorrono una sull'altra.

Una forma di attrito è quella che si presenta quando le superfici di due solidi sono poste a contatto. Per quanto sia liscia infatti la superficie di un solido presenta microscopiche asperità; queste asperità si incuneano le une nelle altre impedendo uno scivolamento agevole tra le due superfici.

Nel moto fra due solidi a contatto si distingue un *attrito statico* ed un *attrito dinamico.*

Il primo si manifesta quando un corpo appoggiato su una superficie inizia a muoversi: esso si oppone infatti all'iniziare del moto. Teoricamente dovrebbe bastare una piccolissima forza per mettere in moto un corpo; ma è esperienza comune che per muovere un corpo fermo occorre applicargli una certa forza e che forze di minore intensità non sono sufficienti. La forza di attrito statico è proporzionale al peso del corpo ma non alla superficie di contatto

$$\mathbf{F}_s = k_s m g \mathbf{n}$$

dove $\mathbf{n}$ è un versore parallelo alla superficie e k_s è il cosiddetto *coefficiente di attrito statico.* Per misurarlo si può utilizzare un piano inclinato il cui angolo di inclinazione può essere variato a piacere: si parte dal piano in posizione orizzontale e se ne aumenta l'inclinazione; nell'istante in cui il corpo inizia a muoversi, la componente della forza peso $F \sin \alpha$ è pari alla forza di attrito statico. Noto il peso del corpo si ricava il coefficiente di attrito statico. In alternativa può essere usato un dinamometro, misurando direttamente la forza necessaria per compensare l'attrito statico. Il coefficiente k_s dipende dai corpi in contatto e dalla condizione delle superfici.

Una volta che il corpo è in moto, su di esso agisce una forza di attrito dinamico. Anch'essa è proporzionale al peso del corpo ma non alla superficie di contatto

$$\mathbf{F}_d = k_d m g \mathbf{n}$$

dove $\mathbf{n}$ è un versore parallelo alla superficie e k_d è il cosiddetto *coefficiente di attrito dinamico.* E' sempre $k_s > k_d$: è facile verificare infatti che una volta messo in moto un corpo, per mantenerlo in movimento occorre applicargli una forza minore di quella che era stata necessaria per iniziare il moto. Per misurare k_d si può usare lo stesso piano inclinato oppure lo stesso dinamometro, misurando la forza necessaria a mantenere il corpo in moto rettilineo uniforme.

L'attrito è un esempio di forza dissipativa: essa si oppone sempre al moto tendendo a diminuire l'energia cinetica. Questo tipo di forze non ammette potenziale.

Capitolo VI

Fluidi

L'idrostatica e l'idrodinamica studiano i fluidi. Questi sono corpi la cui forma non si mantiene costante e le cui parti possono scorrere le une sulle altre. Si suole distinguere i fluidi in liquidi e gas: i primi pur non avendo forma costante hanno tuttavia volume costante, i secondi non hanno neppure volume costante. Sia i liquidi che i gas si adattano alla forma dell'oggetto che li contiene; i gas inoltre tendono ad occupare tutto il volume a disposizione. Molte delle considerazioni di questo Capitolo sono valide per entrambi i tipi di fluido; le eventuali eccezioni saranno segnalate.

I fluidi si possono distinguere in *fluidi ideali* e *fluidi reali*: i primi sono privi di attrito interno e sono perfettamente elastici, i secondi manifestano un attrito interno e non sono perfettamente elastici. I liquidi ideali inoltre sono incompressibili e indilatabili, i liquidi reali possono subire dilatazioni e compressioni, pur in condizioni fisiche particolari. In natura come è immaginabile esistono solo fluidi reali; i fluidi ideali sono comunque una buona approssimazione per affrontare molti problemi.

Si definisce *densità media* di un corpo (sia esso solido, liquido o gassoso) il rapporto fra la sua massa ed il suo volume

$$\rho_m = \frac{m}{V}$$

La densità di un corpo può non essere costante: preso un elemento infinitesimo del corpo in esame, il rapporto fra la sua massa ed il suo volume è la *densità puntuale* (o semplicemente *densità*); in generale essa è funzione della posizione nel corpo.

§ 6.1 Pressione

Si consideri un fluido in quiete in un recipiente. Poiché esso preme contro le pareti, esercita su queste una forza. Si consideri una superficie S e la forza F agente su di essa: si definisce *pressione media* il rapporto

$$p_m = \frac{F}{S}$$

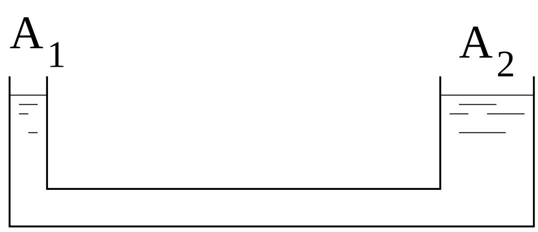
La pressione media può non essere molto indicativa; se tuttavia si prendono aree S sempre più piccole, si ottengono informazioni sempre più dettagliate. Il rapporto fra la pressione agente su una superficie infinitesima attorno ad un punto e la superficie stessa si definisce *pressione* (*locale* o *puntuale*).

La forza è un vettore, e dunque si potrebbe obiettare che anche la pressione debba essere un vettore. Tuttavia la pressione è stata definita nel caso di un fluido in equilibrio, e pertanto la forza non può che essere ortogonale alla superficie: se infatti ci fosse una componente della forza non perpendicolare, tale componente metterebbe in moto il fluido, il che contrasterebbe con la supposizione che il fluido sia in quiete. Quindi la pressione ha carattere scalare e non vettoriale perché si suppone la forza sempre avente una direzione preferenziale, e cioè perpendicolare alla superficie.

6.1.1 Principio di Pascal

Il *principio di Pascal* afferma che in un fluido in quiete la pressione è la stessa in ogni suo punto. Infatti se così non fosse, la differenza di pressione fra due punti metterebbe in movimento il fluido, il che contrasterebbe con l'ipotesi di fluido in quiete.

Questo principio ha diverse applicazioni pratiche, per esempio il torchio idraulico e il martinetto idraulico. Il principio di funzionamento è basato proprio sul'uguaglianza della pressione. Si consideri schematicamente un condotto ripiegato ad U nel quale sia contenuto un fluido, solitamente un olio; sia A_1 l'area di una apertura e $A_2 >> A_1$ l'area dell'altra apertura



Se si esercita una forza F su A_1 la pressione sul fluido è $p = F/A_1$; questa pressione deve essere uguale sulla superficie A_2, dove quindi si avrà una forza $F' = pA_2 = F\ A_2/A_1 >> F$: si riesce così a "moltiplicare" una forza. Se per esempio la superficie A_2 è 100 volte la superficie A_1 si riesce a sollevare un peso 100 volte maggiore della forza applicata su A_1*.

6.1.2 Legge di Stevino

La *legge di Stevino* esprime la pressione di un fluido ad una data quota. Occorre distinguere fra liquidi e gas. Nei primi la densità è una costante (giacché il fluido è incomprimibile): pertanto la pressione ad una profondità h del fluido è data da

$$p(y) = p_0 + \rho g h$$

dove con p_0 si indica la pressione alla superficie. Quindi per un liquido la pressione aumenta linearmente con la profondità.

Nei gas invece la densità non è costante. Si può dimostrare tuttavia che se la temperatura rimane costante la densità è proporzionale alla pressione, $\rho = kp$: allora rimane

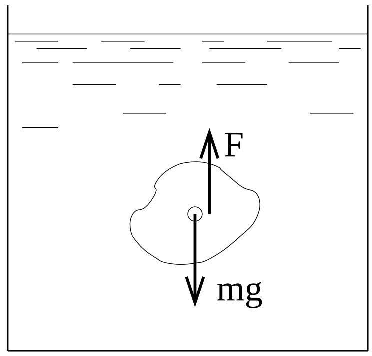
$$p(y) = p_0 \mathrm{e}^{-kgy}$$

Quindi per un gas a temperatura costante la pressione diminuisce esponenzialmente col diminuire della profondità.

6.1.3 Spinta idrostatica

Si consideri un fluido in equilibrio in cui è immerso un corpo di forma qualsiasi. Tale corpo è sottoposto a due forze, la forza peso mg e la spinta derivante dal liquido circostante F (*spinta idrostatica*). Per conoscere il valore di tale forza, si proceda nel seguente modo. Si immagini di sostituire il corpo immerso con un volume dello stesso fluido avente la stessa forma nella stessa posizione. Poichè nulla è cambiato nel resto del fluido, la spinta che

* C'è moltiplicazione della forza non dell'energia, che ovviamente si conserva: se su A_1 si compie un lavoro L, lo stesso lavoro è compiuto dalla forza F' su A_2, quindi se la prima forza sposta il suo punto di applicazione di un tratto l, la seconda forza sposta il suo punto di applicazione di un tratto 100 volte più piccolo.

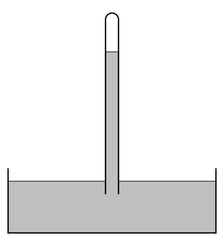


questo esercitava prima sul corpo deve essere la stessa che esercita ora sul volume di fluido. Ma tutto il fluido è in equilibrio, e quindi ora la spinta idrostatica deve essere in modulo pari al peso del volume di fluido (e avere stessa direzione e verso opposto), altrimenti quest'ultimo si metterebbe in moto. Ne consegue che la forza F esercitata dal resto del fluido sul corpo è pari al peso di una porzione di fluido avente lo stesso volume del corpo. E' questo il cosiddetto *principio di Archimede**: un corpo immerso in un fluido riceve una spinta diretta dal basso verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato.

6.1.4 Misura della pressione

La pressione è la forza per unità di superficie. La sua unità di misura è il *pascal*, pari alla forza di 1 Newton che agisce sulla superficie di 1 m^2 : 1 Pa = 1 N/1 m^2 . Altre unità di misura sono l'*atmosfera* e il *bar*, che con il suo sottomultiplo, il *millibar*, era utilizzato fino a poco tempo fa nelle previsioni meteorologiche. Tutte queste unità però, come molte altre, sono state abolite, e nelle documentazioni ufficiali devono essere usate solo le unità del SI.

Gli strumenti per misurare la pressione dell'aria sono detti *barometri*. Il primo fu ideato da Torricelli e consiste in una provetta piena di mercurio parzialmente immersa in una vaschetta contenente anch'essa del mercurio (si usa un fluido ad alta densità per avere delle colonne non molto alte): la pressione dell'aria sulla superficie libera del mercurio deve essere uguale, per il principio di Pascal, alla pressione esercitata dalla colonna di



* A rigore si tratta di un teorema, giacché è stato dimostrato; il nome ha ragioni storiche.

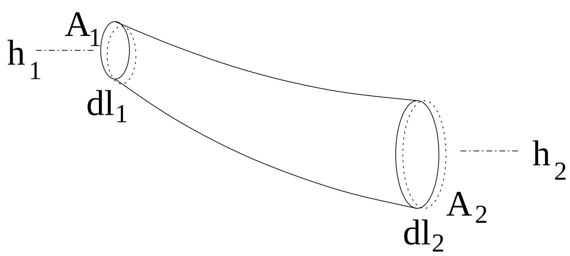
mercurio nella provetta. Al livello del mare questa colonna è alta $h = 760\ mm$: dalla legge di Stevino si ricava allora

$$p_{atm} = \rho g h = 13.6 \cdot 10^3\ Kg/m^3 \times 9.8\ m/s^2 \times 0.76\ m = 1.02 \cdot 10^5\ Pa$$

I barometri oggi comunemente utilizzati sono invece costituiti da una scatola metallica in cui è stato fatto il vuoto: al variare della pressione esterna la parete metallica varia la sua concavità. Queste oscillazione sono trasmesse ad un indice che segna la pressione su una scala opportunamente tarata.

§ 6.2 Teorema di Bernouilli

Si consideri un liquido in moto stazionario. Il *moto stazionario* è caratterizzato dal fatto che ogni particella costituente il liquido si muove parallelamente alla altre, seguendo delle traiettorie, dette *linee di flusso*, che non si intersecano. In questo regime la velocità in ogni punto è funzione solo della posizione e non del tempo (ovvero questo regime mantiene le sue caratteristiche nel tempo). Si prenda in esame un *tubo di flusso*, cioè un insieme di queste traiettorie



In questa situazione è possibile dimostrare che, se ρ è la densità del fluido, v_1 la sua velocità e p_1 la sua pressione nel punto alla quota h_1, e v_2 e p_2 la sua velocità e la sua pressione nel punto a quota h_2,

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h_1$$

ovvero

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h = \text{cost}$$

quindi in un fluido in moto stazionario la somma di queste tre quantità rimane costante. Questa relazione è nota come *teorema di Bernouilli* ed è di estrema importanza nello studio del moto dei liquidi (e con una certa approssimazione dei fluidi in generale). Essa non è nient'altro che l'espressione della conservazione dell'energia meccanica nel moto di un fluido.

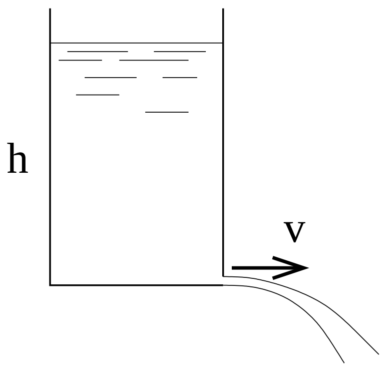
Il teorema di Bernouilli contiene in sé tutte le leggi sui fluidi: per esempio, se il fluido è in quiete, considerando due punti a quota 0 e h si ha

$$p = p_0 - \rho g h$$

che è la legge di Stevino (tenendo conto del segno di h).

6.2.1 Teorema di Torricelli

Si abbia un recipiente riempito di un liquido e dotato di un piccolo foro da cui il liquido fuoriesce; sia h l'altezza della superficie libera del liquido rispetto al foro. Si vuole conoscere la velocità con la quale il liquido fuoriesce. Questo risultato può essere agevolmente ottenuto utilizzando il teorema di Bernouilli, osservando che in questo caso è $p_1 = p_2 = p_{atm}$, giacché sia sul foro sia sulla superficie libera agisce la stessa pressione atmosferica: allora ponendo a 0 la quota del foro



$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h$$

Essendo il foro piccolo, la velocità di discesa del fluido è trascurabile: perciò sulla superficie libera del fluido si ha $v_0 \simeq 0$, e quindi si ottiene

$$\frac{1}{2} v^2 = g h \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gh}$$

ovvero la velocità di uscita è la stessa che avrebbe un grave cadendo da una altezza pari a quella del liquido: è questo il *teorema di Torricelli*.

6.2.2 Portata e legge di Leonardo

Si definisce *portata* la quantità di fluido che attraversa una sezione di un condotto nell'unità di tempo

$$Q = \frac{m}{t} = \frac{\rho V}{t} = \frac{\rho S v t}{t} = \rho S v$$

La *legge di Leonardo* afferma che la portata di un fluido è costante $Q = \text{cost}$. Nel caso di un liquido, poi, visto che ha densità costante, questa legge si riscrive più semplicemente $Sv = \text{cost}$: dove la sezione del condotto è minore la velocità del liquido è maggiore e viceversa.

6.2.3 Velocità e pressione

Nel caso di un condotto orizzontale, per il quale $h_1 = h_2$, il teorema di Bernouilli si riduce a

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{cost}$$

ne segue che laddove la velocità del liquido è minore la pressione è maggiore e viceversa. In prima approssimazione questa legge è applicabile anche ai gas, ed è alla base di molti fenomeni tra cui la portanza delle ali di un aereo.

§ 6.3 Attrito e viscosità

In un fluido reale è presente e ineliminabile l'attrito fra le particelle che lo compongono. Come conseguenza il teorema di Bernouilli va modificato tenendo conto che nel moto una parte dell'energia viene dissipata in attrito: l'equazione di bilanciamento diventa

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 + L_{att}$$

Occorre allora stabilire una differenza di pressione per mantenere in moto il fluido. Infatti un fluido ideale si mantiene in moto uniforme in assenza di differenze di pressione, mentre una differenza di pressione causa una accelerazione del suo flusso. Invece un fluido reale in assenza di differenze di pressione tende a perdere velocità, giacché una parte dell'energia va persa in attrito, mentre per mantenerlo in moto uniforme occorre applicargli una differenza di pressione opportuna che compensi tali perdite. La potenza delle forze di attrito è data da

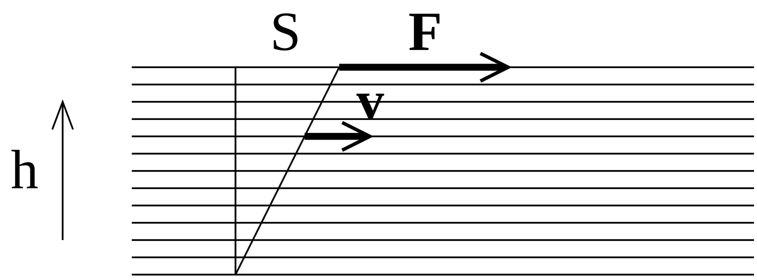
$$W_{att} = \frac{L}{t} = \frac{Fs}{t} = \frac{S\Delta p\ vt}{t} = Q\Delta p$$

quindi è pari alla portata per la differenza di pressione.

6.3.1 Viscosità

Contrariamente ad un fluido ideale, le cui particelle scorrono le une sulle altre senza attrito, per mantenere in moto un fluido reale occorre applicargli una differenza di pressione, il cui lavoro si trasforma (in tutto o in parte) in calore a causa dell'attrito interno.

Si immagini di suddividere il fluido in strati paralleli di spessore infinitesimo: questi strati scorrono gli uni sugli altri nella direzione del moto a velocità differenti



L'elemento di superficie S di uno strato esercita sul corrispondente elemento dello strato adiacente una forza d'attrito di modulo F secondo la formula sperimentale

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta h}$$

ovvero F risulta proporzionale alla superficie S e al gradiente di velocità $\frac{\Delta v}{\Delta h}$, cioè alla variazione di velocità in rapporto ad uno spostamento in direzione perpendicolare alla velocità stessa. Il coefficiente di proporzionalità η è detto *coefficiente di attrito interno* o *viscosità*.

Nei liquidi la viscosità diminuisce molto all'aumentare della temperatura, e in genere aumenta al crescere della pressione (l'acqua fa eccezione). Nei gas invece aumenta con la temperatura ed è praticamente indipendente dalla pressione.

Se si dispone di un condotto orizzontale di lunghezza L e raggio R, al cui interno scorre di moto laminare un liquido reale di viscosità η e ai cui capi è mantenuta una differenza di pressione Δp costante, la quantità V di fluido che vi scorre nel tempo t è data dalla *legge di Hagen–Poiseuille*

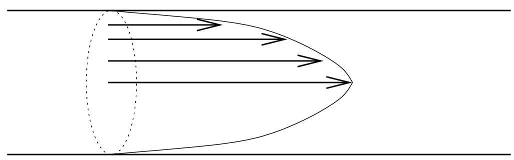
$$V = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L} t$$

ovvero è direttamente proporzionale alla quarta potenza del raggio e alla differenza di pressione, ed è inversamente proporzionale alla lunghezza del condotto e alla viscosità. Se poi il condotto non è orizzontale ma forma un angolo α con l'orizzontale, la formula si trasforma in

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \sin\alpha \right) t$$

dove ρ è la densità del fluido e g l'accelerazione di gravità.

Per un liquido reale il profilo di velocità, cioè la distribuzione della velocità lungo un condotto, assume la forma di un paraboloide: la velocità è massima al centro e decresce verso i lati, fino ad essere nulla per gli strati a diretto contatto col condotto



§ 6.4 Turbolenza

Quando un fluido si muove a velocità relativamente basse, il suo moto è laminare, ovvero tutti gli strati infinitesimi scorrono gli uni sugli altri senza intersecarsi. Quando invece la velocità del fluido è alta, si innescano dei moti turbolenti: in questo caso si formano dei vortici, in cui gran parte dell'energia va dispersa senza aumentare la velocità delle particelle di fluido

La descrizione del moto turbolento è assai più complessa, richiedendo lo studio di equazioni altamente non lineari. Il tipo di moto però può essere predetto dal valore del *numero di Reynolds* : se un fluido di densità ρ e viscosità η attraversa con velocità v un condotto di diametro d, il numero di Reynolds è definito come

$$R = \frac{vd\rho}{\eta}$$

Sperimentalmente si osserva che per valori $R \lesssim 2000$ il moto è laminare, se invece $R \gtrsim 5000$ il moto è turbolento. Per valori intermedi del numero di Reynolds il moto può passare improvvisamente da laminare a turbolento al minimo variare di condizioni esterne, quali la forma del condotto, la condizione delle sue pareti, e simili.

La formazione di vortici è importante in particolare nello studio del moto di un corpo all'interno di un fluido: questo infatti oppone una resistenza al moto, resistenza che dipende non solo dalla velocità del corpo, ma anche dalla sua sezione e dalla forma del corpo. A parità di sezione infatti forme più affusolate diminuiscono la formazione di vortici dietro il corpo in moto, i quali sono una delle cause principali di dissipazione dell'energia in attrito.

Capitolo VII

Calore e temperatura

§ 7.1 Sistemi termodinamici

I sistemi costituiti da un gran numero di particelle possono essere studiati sia da un punto di vista microscopico che da un punto di vista macroscopico. Nel primo caso si segue l'evoluzione nel tempo di ogni singola particella del sistema: ciò richiede però la soluzione di un gran numero di equazioni accoppiate. Nel secondo invece si rinuncia alla conoscenza dell'evoluzione di ogni particella, ma ci si limita a studiare l'evoluzione del sistema nel suo insieme, considerando solo quelle variabili che sono misurabili macroscopicamente.

Un *sistema termodinamico* è una porzione di materia che occupa una zona definita di spazio separata da "pareti" dall'ambiente esterno (il resto dell'Universo). Tali pareti vanno intese in senso lato: solitamente sono pareti fisiche, come quelle di un contenitore, ma possono anche essere ideali: ad esempio, il Sole è certamente un sistema termodinamico, che si estende fin dove arriva la sua influenza; dove questa cessa (ben oltre l'ultimo pianeta) si ha la separazione con il resto dell'Universo, separazione che come si capisce bene è solo ideale. Quindi in generale le "pareti" delimitano la zona di influenza del sistema.

Lo stato di un sistema termodinamico è completamente descritto da un insieme di variabili di stato, le *variabili termodinamiche*. Esse possono essere qualsiasi variabile atta a descrivere completamente lo stato del sistema. Per i gas tipicamente si usano la pressione p, il volume V e la temperatura T. Quando i valori di queste variabili sono costanti nel tempo si dice che il sistema è in equilibrio, se almeno una di esse sta variando si dice invece che il sistema sta subendo una trasformazione.

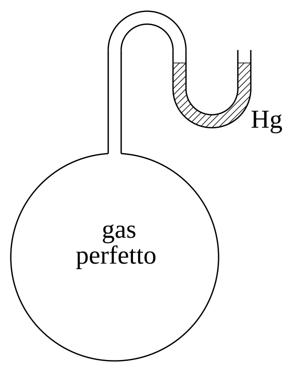
Le variabili termodinamiche in realtà non sono indipendenti, ma sono legate fra loro da una relazione detta *equazione di stato*; per i gas essa sarà un'equazione del tipo

$$f(p, V, T) = 0$$

§ 7.2 Misura della temperatura

Della temperatura si ha una percezione sensitiva ben nota: il tatto o l'osservazione di varî fenomeni fisici portano ad una definizione intuitiva della temperatura. Come ogni altra grandezza fisica però anche la temperatura necessita di una rigorosa definizione attraverso un processo di misura. Per farlo è sufficiente considerare un sistema che abbia una qualche caratteristica misurabile il cui valore dipenda dalla temperatura.

Uno degli strumenti possibili è dato da una quantità di gas perfetto racchiuso in un volume fisso del quale si possa misurare la pressione ad esempio con un manometro a mercurio: si verifica infatti che la pressione dipende dalla temperatura



Si abbiano due sistemi; si metta a contatto il volume di gas col primo di essi e si misuri lo spostamento della colonnina di mercurio, cioè la sua pressione; poi si metta a contatto il volume di gas con il secondo sistema e si misuri la pressione. Se i due valori ottenuti sono uguali, si dirà che i due sistemi sono alla stessa temperatura; altrimenti si dirà a temperatura superiore quel sistema che provoca lo spostamento maggiore della colonnina di mercurio, ovvero la pressione maggiore. Si ha così un modo per confrontare fra loro le temperatura. E' poi sufficiente scegliere una serie di sistemi campione (almeno due), assegnare loro dei valori convenzionali di temperatura e infine costruire una scala di temperature suddividendo gli intervalli in parti uguali. Per esempio, se si scelgono come sistemi campione il ghiaccio fondente e l'acqua in ebollizione*, si assegnano loro i valori di 0 gradi e 100 gradi, e infine si suddivide tale intervallo in 100 parti uguali, si ha la usuale scala Celsius delle temperature.

Nella pratica si usano molti altri tipi di termometro, nei quali si sfrutta una qualche proprietà dipendente dalla temperatura e facilmente misurabile. Per esempio, nei comuni termometri a mercurio o ad alcool, è il volume della sostanza termometrica che si espande o si contrae a seconda della temperatura. Un altro tipo di termometro abbastanza comune impiega la differente dilatazione di due metalli diversi uniti insieme (*lamina bimetallica*): col calore la loro dilatazione è diversa e la lamina si piega da un lato. I termometri elettrici invece misurano la variazione della resistenza elettrica con la temperatura.

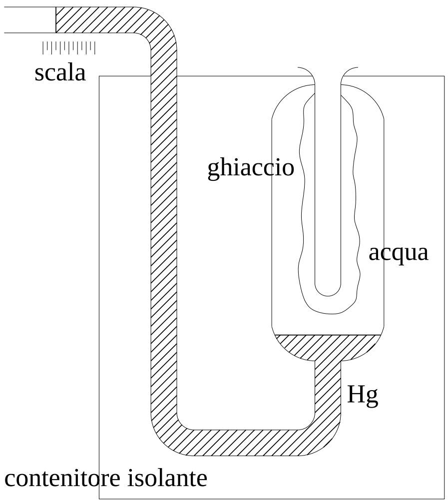
§ 7.3 Il calore

Anche del calore si ha un concetto intuitivo molto comune. Un tempo si pensava al calore come ad un fluido (*fluido calorifico*) in grado di passare dai corpi più caldi ai corpi più freddi; oggi questa rappresentazione è stata abbandonata perché non rispondente ai dati sperimentali.

Per poter definire la quantità di calore occorre un metodo per misurarla. Gli apparecchi utilizzati per misurare gli scambi di calore sono detti *calorimetri*, e uno dei più precisi è il *calorimetro di Bunsen*: esso è costituito da una provetta di vetro, in cui avvengono gli scambi di calore, immersa in un bulbo contenente dell'acqua e, in fondo, del mercurio, il quale risale in un tubicino fino ad una scala graduata. Il tutto è immerso in un apposito contenitore per impedire le influenze dell'ambiente esterno sulle misure.

Il bulbo è immerso in acqua, e intorno ad esso una parte viene fatta trasformare in ghiaccio. Dopodiché si immerge un corpo nella provetta: se esso è più caldo del ghiaccio, cede del calore con l'effetto di sciogliere una parte ritrasformandola in acqua; e poiché l'acqua occupa un volume minore, parte del mercurio viene richiamato, e la sua superficie libera si sposta lungo la scala graduata verso l'interno. Viceversa se il corpo immerso è

* Solitamente si scelgono sistemi che stanno cambiando fase, giacché in tal modo la loro temperatura rimane costante.



più freddo, assorbe del calore con l'effetto di congelare un po' dell'acqua trasformandola in ghiaccio; e siccome il ghiaccio occupa un volume maggiore, il mercurio viene spinto verso l'esterno, e la sua superficie libera si sposta lungo la scala verso l'esterno.

Immergendo un corpo nel calorimetro, si misura lo spostamento del mercurio. Immergendone un secondo, si misura lo spostamento corrispondente. Per definizione, se i due spostamenti sono uguali si dirà che gli scambi di calore sono uguali; se invece gli spostamenti sono diversi, lo scambio di calore maggiore sarà quello che ha provocato lo spostamento maggiore. E' poi sufficiente scegliere un particolare scambio di calore come unità di misura; il SI definisce l'unità di misura, la *caloria*, come la quantità di calore necessaria a far passare dalla temperatura di 14.5 °C alla temperatura di 15.5 °C un grammo di acqua distillata.

Si noti che in questo modo in realtà vengono definiti gli scambi di calore e non il contenuto di calore di un corpo: quest'ultimo concetto infatti non ha significato fisico. Per definizione lo scambio di calore è positivo, $\Delta Q > 0$, se il corpo assorbe calore, ed è negativo, $\Delta Q < 0$, se il corpo cede calore.

7.3.1 Capacità termica

Se un corpo assorbe o cede una quantità di calore ΔQ e la sua temperatura varia (aumenta nel primo caso, diminuisce nel secondo) di un ΔT, si definisce *capacità termica* il rapporto

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

ovvero la capacità termica è la quantità di calore necessaria a variare di un grado la temperatura del corpo. Se poi il corpo è omogeneo, si può definire una capacità termica per unità di massa, che prende nome di *calore specifico*

$$c = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

La capacità termica e il calore specifico in realtà dipendono dalla temperatura alla quale lo scambio di calore avviene, per cui sono più correttamente definiti considerando uno scambio infinitesimo di calore (cui corrisponde una variazione infinitesima di temperatura). Ecco perché nel definire la caloria si specifica pure la temperatura alla quale lo scambio di calore avviene.

Per i gas capacità termica e calore specifico dipendono non solo dalla temperatura ma anche dal tipo di trasformazione cui sono sottoposti*: si hanno quindi infiniti calori specifici. Si suole però sceglierne due in particolare, il calore specifico a volume costante, C_V, ed il calore specifico a pressione costante, C_p.

§ 7.4 I gas perfetti

I gas perfetti sono una utile idealizzazione dei gas reali: privi di attrito, possono essere compressi in qualsiasi volume per quanto piccolo e restano allo stato gassoso a qualunque temperatura. I gas reali ovviamente non hanno queste caratteristiche; tuttavia i gas reali si comportano praticamente come i gas perfetti quando sono a basse pressioni e alte temperature (cioè quando si possono trascurare il volume delle molecole che li costituiscono e le loro interazioni reciproche).

Sperimentalmente si verifica che i gas perfetti seguono le seguenti leggi

– *Legge di Avogadro*: una mole di gas perfetto alla pressione $p_0 = 1$ atm e alla temperatura $T_0 = 0$ °C occupa sempre un volume $V_0 = 22.4$ litri

– *Legge di Boyle*: quando un gas viene compresso o espanso mantenendo costante la sua temperatura, pressione e volume sono inversamente proporzionali

$$pV = \text{cost} \qquad\qquad \text{a } T \text{ costante}$$

* A rigore anche per solidi e liquidi, ma la dipendenza è talmente piccola da essere trascurabile.

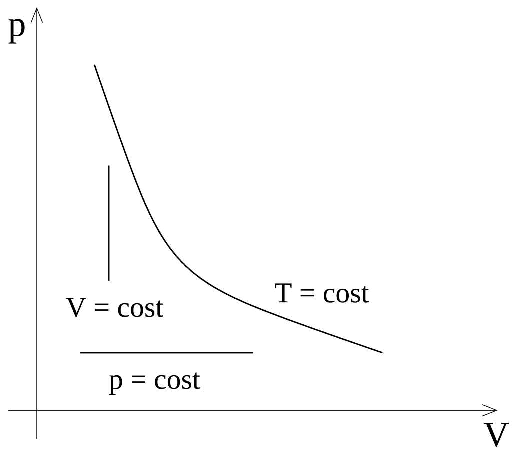
– *Leggi di Guy-Lussac*: quando un gas è compresso o espanso a volume costante, la pressione è direttamente proporzionale alla temperatura; quando un gas è compresso o espanso a pressione costante, il volume è direttamente proporzionale alla temperatura

$$p = p_0 \alpha T \qquad \text{a } V \text{ costante}$$

$$V = V_0 \alpha T \qquad \text{a } p \text{ costante}$$

dove α è una costante pari a $\alpha = 1/273.15\ °K$.

Le trasformazioni a temperatura costante sono dette *isoterme*, le trasformazioni a volume costante sono dette *isocore* e quelle a pressione costante sono dette *isobare*. Queste trasformazioni andrebbero rappresentate in uno spazio tridimensionale $p-V-T$; tuttavia risulta graficamente più comprensibile una rappresentazione bidimensionale su due soli assi, e solitamente si usano pressione e volume (*piano di Clapeyron*). Su tali assi una trasformazione isobara è rappresentata da un segmento orizzontale (p rimane costante), una trasformazione isocora da un segmento verticale (V rimane costante), e una trasformazione isoterma da un ramo di iperbole equilatera (di equazione $pV = K$, dove la costante K dipende dalla temperatura)



Da queste leggi valide per trasformazioni particolari è possibile dedurre una legge più generale, che assume la forma semplice

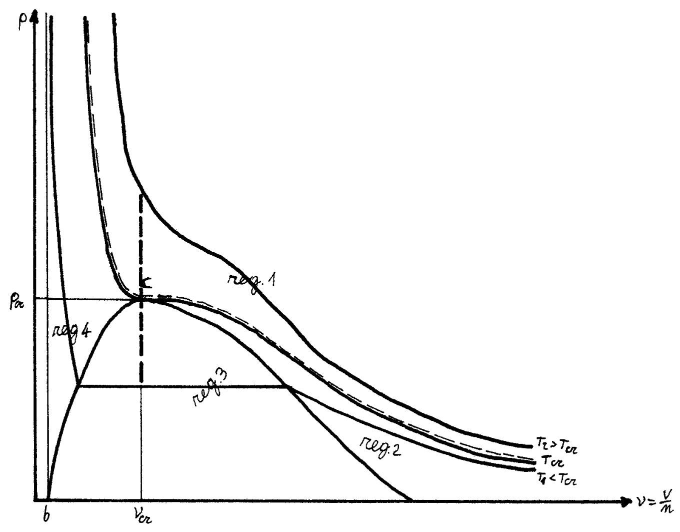
$$pV = nRT$$

detta *legge di stato dei gas perfetti*, dove n è il numero di moli di gas. Essa contiene come casi particolari le leggi di Boyle e di Guy-Lussac. R è una costante che prende il nome di *costante dei gas perfetti.*

7.4.1 I gas reali

I gas reali seguono la legge dei gas perfetti solo in modo approssimato e solo in condizioni di alta temperatura e bassa pressione, laddove il volume delle molecole che lo costituiscono e le interazioni reciproche possono essere trascurati.

Se si fa compiere una trasformazione isoterma ad un gas reale ad una temperatura sufficientemente alta, esso segue abbastanza fedelmente un ramo di iperbole, come vuole la legge dei gas perfetti. All'abbassarsi della temperatura però l'isoterma di un gas reale si distorce allontanandosi sempre più dalla forma iperbolica. Per un particolare valore della temperatura (detto *temperatura critica*, variabile per ciascun gas) l'isoterma presenta un flesso a tangente orizzontale in un punto detto *punto critico*



Per temperature più basse le isoterme presentano dei tratti orizzontali, in cui coincidono con le isobare. Comprimendolo lungo una tale isoterma, il gas ad un certo punto inizia a trasformarsi in liquido: in questo stato la pressione rimane costante perché comprimendo ulteriormente il gas invece di aumentare la pressione si ha che una frazione ulteriore del gas si liquefa. In questo intervallo quindi si ha compresenza di gas e liquido (*vapor saturo*).

Alla fine tutto il gas diventa liquido, e a questo punto l'isoterma è praticamente verticale: infatti un liquido è di fatto incomprimibile, e quindi per ottenere piccole diminuzioni del volume occorrono enormi pressioni.

7.4.2 Trasformazioni adiabatiche

Un tipo di trasformazioni particolarmente importanti sono quelle che avvengono senza scambi di calore: una tale trasformazione è detta *adiabatica*. Per essa quindi è $\Delta Q = 0$. Nel caso dei gas perfetti si può dimostrare che l'equazione di una trasformazione adiabatica è data da

$$pV^\gamma = \text{cost}$$

simile all'isoterma, ma il volume è elevato ad una potenza γ, che si dimostra essere uguale a

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} > 1$$

infatti è sempre $C_p > C_V$.

§ 7.5 Trasmissione del calore

Il calore può trasmettersi da un corpo ad un altro in tre modi diversi: per conduzione, per convezione e per irraggiamento.

Nella *conduzione* la trasmissione del calore avviene senza movimento (macroscopico) di materia. E' il tipico modo di trasmissione del calore nei solidi. La conduzione può essere interna, quando avviene fra parti di uno stesso corpo, ed esterna, quando avviene alla superficie di separazione fra due corpi.

Nella *convezione* la trasmissione di calore avviene invece mediante movimento (macroscopico) di materia. E' il tipico modo di trasmissione di calore nei liquidi e nei gas: infatti differenze di calore in porzioni diverse di materia generano differenze di pressione, che in fluidi e gas ne provocano il moto. Si pensi ad esempio all'acqua che si scalda in una pentola oppure ai movimenti di masse d'aria calda e fredda nell'atmosfera.

Nell'*irraggiamento* la trasmissione di calore avviene anche in assenza di materia. In questo caso sono onde elettromagnetiche che trasmettono il calore: è ciò che avviene ad esempio nel Sistema solare, giacché l'energia emessa da Sole arriva fino alla Terra per irraggiamento.

§ 7.6 Esperienza di Joule: equivalenza fra lavoro e calore

Si vuole stabilire che relazione esiste fra lavoro e calore. Per evitare che una parte di lavoro o di calore vada a modificare lo stato interno del sistema, si considera una trasformazione ciclica, nella quale quindi il sistema ritorna nello stato iniziale: in questo caso allora tutto il lavoro si trasforma in calore.

Si possono considerare diverse trasformazioni di diverse sostanze; storicamente l'esperienza fu eseguita da Joule utilizzando un calorimetro di Bunsen: in esso il lavoro meccanico prodotto dalla caduta di pesi si trasformava in calore che andava a riscaldare la sostanza contenuta nella provetta. Ciò che Joule misurò fu che per qualunque fluido usato e per qualunque lavoro compiuto, il rapporto fra lavoro e calore era sempre lo stesso, pari ad una costante $J = 4.186\ J/cal$. Questo è un importantissimo risultato: significa che il calore è una forma di energia, e quindi ha la capacità di compiere un lavoro. Il fatto che il rapporto non sia 1 deriva solo dal fatto che sono state usate unità di misura diverse per lavoro e calore. E' questo il *primo principio della termodinamica* e non è nient'altro che il principio di conservazione dell'energia in una forma più ampia, che comprende anche il calore.

Capitolo VIII

Elettricità

§ 8.1 Cariche elettriche. Legge di Coulomb

L'esistenza di fenomeni elettrici era nota sin dall'antichità. Questi fenomeni sono dovuti all'esistenza di *cariche elettriche*; esse si possono generare per induzione o per strofinio, azioni che determinano la separazione delle cariche di segno opposto.

Ciò è dovuto dalla struttura atomica della materia. La materia è costituita da molecole, ognuna dotata di proprie caratteristiche chimico–fisiche, le quali molecole a loro volta sono costituite da atomi. Gli atomi sono composti da un nucleo centrale, in cui è concentrata praticamente tutta la massa, circondato da una nuvola di elettroni che vi ruotano intorno; i nuclei a loro volta sono composti da due tipi diversi di particelle, protoni e neutroni. Elettroni e protoni hanno cariche elettriche uguali in valore assoluto ed opposte di segno; per convenzione si dice *negativa* il segno della carica degli elettroni e *positiva* il segno della carica dei protoni (mentre i neutroni sono privi di carica). Lo sfregamento di due oggetti diversi causa la sottrazione di elettroni da parte di uno a favore dell'altro: il secondo ha così un eccesso di cariche negative mentre il primo rimane con un eccesso di cariche positive, il che si manifesta con una carica complessiva del corpo.

Questa struttura elementare però fu scoperta solo fra la fine del secolo XIX e i primi venti anni del XX. Prima di allora era solo noto il fatto che la materia opportunamente strofinata può assumere una carica, che si manifesta con la capacità di attrarre o respingere altri oggetti carichi. La carica elettrica infatti si manifesta con una forza che si esercita su altri corpi carichi; sperimentalmente si osserva che corpi con carica dello stesso segno si respingono mentre corpi con cariche di segno opposto si attraggono.

Occorre allora un metodo operativo per definire la carica elettrica. Per questo basta prendere un corpo carico e misurare la forza con cui esso attrae o respinge un corpo campione ad una data distanza; se ne prende quindi un secondo e si misura la forza di interazione con lo stesso corpo campione alla medesima distanza: se le forze esercitate sono uguali, si dirà che le cariche sui due corpi sono uguali (in valore assoluto), mentre si dirà maggiore quella carica che esercita una forza maggiore sulla carica campione. E' così possibile confrontare le cariche fra loro. Serve infine una unità di misura; nel Sistema Internazionale tale unità è il *coulomb*: due cariche uguali si dicono di 1 C l'una se posti ad una distanza di 1 m (nel vuoto) si attraggono o si respingono con una forza di $9 \cdot 10^9$ N*.

Nella definizione precedente è stata specificata pure la distanza alla quale si trovano le cariche: infatti si verifica sperimentalmente che la forza di attrazione o repulsione fra due date cariche varia con la distanza. Per verificare tale variazione, Coulomb nella seconda metà del Settecento costruì una bilancia di precisione con cui misurare con la maggiore accuratezza possibile la forza fra due cariche puntiformi. Pervenne in tal modo alla *legge di Coulomb*: la forza con cui una carica puntiforme q_1 attira o respinge una seconda carica puntiforme q_2 è diretta lungo la congiungente le due cariche ed il suo modulo è direttamente proporzionale al valore delle due cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza r

$$F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

La costante di proporzionalità K dipende dal mezzo in cui le cariche sono poste: a parità di cariche e di distanza, la forza F è massima nel vuoto, mentre è minore in un mezzo, dipendendo dalle caratteristiche elettriche del mezzo stesso.

Il rapporto fra la forza F ed una delle due cariche è detto *campo elettrico*

$$E = \frac{F}{q_1} = K\frac{q_2}{r^2}$$

Esso è un vettore avente la stessa direzione di F e verso dipendente dal segno di q_1. Il campo elettrico è un concetto importante, perché permette di separare il contributo della

* Questa scelta può sembrare curiosa, ma è in realtà legata ad altre unità di misura che sono scelte in maniera più comoda.

carica sorgente del campo dalla carica campione che ne sente l'influenza, e questo può semplificare i calcoli nella risoluzione di problemi complessi.

Quando si hanno più di due cariche elettriche, vale il cosiddetto *principio di sovrapposizione*: la forza esercitata su una di esse è data dalla somma vettoriale delle forze esercitate dalle altre cariche considerate una alla volta. Questo permette di estendere la legge di Coulomb anche al caso in cui le cariche non siano puntiformi: infatti è sufficiente scomporre le cariche in parti talmente piccole da poter essere considerate puntiformi (quindi in parti infinitesime) e poi sommare tutti i contributi.

8.1.1 Conduttori e isolanti

In taluni materiali le cariche elettriche sono libere di muoversi al loro interno: questi materiali sono detti *conduttori*. Un tipico esempio di conduttori sono i metalli. A livello atomico ciò è dovuto al fatto che alcuni elettroni non sono vincolati ad un dato atomo, ma sono liberi di muoversi all'interno del materiale. Quando si comunica una carica ad un conduttore, questa si distribuisce sulla superficie del conduttore stesso fino a raggiungere l'equilibrio.

In altri materiali invece le cariche elettriche non sono libere di muoversi, ma rimangono vincolate alla posizione in cui sono state prodotte: questi materiali sono detti *isolanti*. Il loro comportamento è dovuto al fatto che in essi gli elettroni sono strettamente legati ai proprî atomi e non hanno possibilità di muoversi. Tipici esempi di isolanti sono le materie plastiche e i materiali ceramici.

§ 8.2 Potenziale elettrico

E' possibile dimostrare che anche la forza elettrica è conservativa: essa quindi ammette potenziale. Per ricavarne la forma esplicità è necessario calcolare il lavoro della forza elettrica lungo un dato cammino per spostare una carica fra due posizioni. Si ricava così l'energia potenziale di due cariche, data da

$$V = -K\frac{q_1 q_2}{r}$$

cioè dipende dall'inverso della distanza fra le cariche.

E' possibile definire anche il potenziale di una carica singola in un dato punto come il lavoro necessario a portare tale carica da un punto infinitamente lontano al punto considerato. La *differenza di potenziale* fra due punti è allora il lavoro necessario a portare una carica dall'uno all'altro punto. Tali lavori non dipendono dal percorso scelto ma solo dai punti iniziale e finale, appunto perché la forza elettrica è conservativa.

La differenza di potenziale elettrico è una grandezza derivata; nel Sistema Internazionale la sua unità di misura è il *volt*: tra due punti si ha una differenza di potenziale di 1 V quando è necessario un lavoro di 1 J per spostare una carica di 1 C tra i due punti.

§ 8.3 Capacità elettrica

La *capacità elettrica* è definita come il rapporto fra una carica Q e il suo potenziale V

$$C = \frac{Q}{V}$$

Nel sistema internazionale l'unità di misura è il *farad*: si ha la capacità di 1 F quando la carica di 1 C genera una differenza di potenziale di 1 V.

In un circuito i componenti elettrici che sfruttano la capacità sono i *condensatori*. Essi sono costituiti da due piastre metalliche, dette *armature* fra le quali è interposto un isolante. Quindi le cariche non possono fluire da una piastra all'altra. Quando una piastra viene caricata, sull'altra si genera per induzione una carica uguale ed opposta; l'insieme delle due cariche dà luogo ad un campo elettrico fra le piastre e determina fra esse una differenza di potenziale. Un condensatore è quindi in grado di accumulare cariche elettriche sulle sue armature. La capacità di un condensatore non dipende dalla carica accumulata o dalla differenza di potenziale ma solo dalle sue caratteristiche fisiche (area delle armature, distanza fra le stesse, natura dell'isolante interposto).

§ 8.4 La corrente elettrica

Quando fra due punti si stabilisce un campo elettrico, le cariche sono soggette ad una forza. Se esse sono libere di muoversi, lo faranno sotto l'azione di tale forza: si genera così un flusso di cariche. Nei metalli, che sono ottimi conduttori, le cariche in moto sono gli elettroni liberi di muoversi; altri esempi di conduttori sono i liquidi in cui sono disciolti dei sali ionici (capaci cioè di scomporsi in una parte carica positivamente ed una parte carica negativamente), ad esempio acqua in cui sia sciolto del cloruro di sodio (il normale sale da cucina): in questi casi sono gli ioni a muoversi all'interno del liquido.

Se in un intervallo di tempo t fluisce una carica Q attraverso un conduttore, si definisce *corrente elettrica media* il rapporto

$$i_m = \frac{Q}{t}$$

ovvero la carica media che fluisce nell'unità di tempo. Questo rapporto però fornisce solo una indicazione approssimativa del moto delle cariche; riducendo il tempo di osservazione t si ottengono dei valori medi sempre più indicativi; quando poi l'intervallo di tempo t è talmente piccolo da poter essere considerato infinitesimo, il rapporto

$$i = \frac{q}{t}$$

fra la carica (anch'essa infinitesima) che fluisce nell'intervallo di tempo t e l'intervallo stesso, prende il nome di *corrente elettrica istantanea*. L'unità di misura della corrente elettrica è l'*ampere*: si dice che passa una corrente di 1 A quando una carica di 1 C fluisce in 1 s. In realtà nel Sistema Internazionale l'ampere è una unità fondamentale (definita mediante gli effetti magnetici della corrente), mentre il coulomb è una unità derivata (definita come la carica che è trasportata in un secondo dalla corrente di un ampere).

8.4.1 La resistenza

In molti materiali conduttori, quali i metalli, si riscontra una relazione lineare tra la differenza di potenziale applicata ai capi di un conduttore e la corrente che vi circola. Questa relazione è la *legge di Ohm*

$$V = Ri$$

La costante di proporzionalità R prende il nome di *resistenza elettrica*: essa indica l'opposizione che la corrente incontra al suo moto all'interno del conduttore, una sorta di attrito dovuto all'urto dei portatori di carica con gli atomi del materiale conduttore.

L'unità di misura della resistenza è l'*ohm*: un conduttore fornisce la resistenza di 1 Ω se sottoposto ad una differenza di potenziale di 1 V fa circolare una corrente di 1 A.

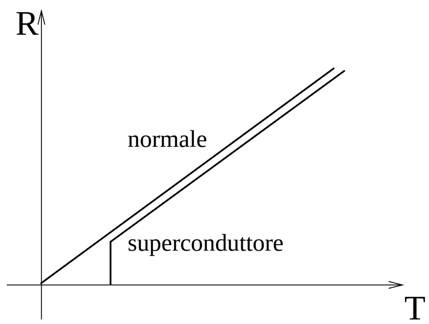
Non tutti i materiali seguono una relazione lineare di questo tipo; quelli per i quali vale la legge di Ohm vengono anche detti *conduttori ohmici*.

La resistenza di un conduttore omogeneo è direttamente proporzionale alla sua lunghezza l e inversamente proporzionale alla sua sezione A

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

la costante di proporzionalità ρ è detta *resistività* e dipende dalle caratteristiche intrinseche del materiale che costituisce il conduttore. I metalli (in particolare argento e rame) sono i migliori conduttori, con valori di ρ intorno a $10^{-8} \div 10^{-7}\ \Omega\, m$.

La resistenza di un materiale dipende dalla temperatura dello stesso e cresce con essa. Pertanto la misura della corrente che circola in un conduttore, e quindi la misura della sua resistenza, può essere utilizzata per costruire un termometro, come già accennato nel Capitolo precedente. In tutti i conduttori la resistenza tende linearmente a 0 quando la temperatura tende allo zero assoluto ($-273.16°$C); in alcuni materiali particolari però la resistenza crolla bruscamente a 0 prima che la temperatura raggiunga lo zero assoluto: è il fenomeno della *superconduttività*



8.4.2 Potenza elettrica

Quando una corrente elettrica attraversa un conduttore, disperde parte dell'energia elettrica in calore, provocando il riscaldamento del conduttore stesso. Questo fenomeno, noto come *effetto Joule*, è alla base di numerosi dispositivi pratici, come stufe, riscaldatori, ferri da stiro e apparecchi similari.

La potenza emessa per effetto Joule, cioè l'energia dispersa in calore nell'unità di tempo, da una corrente i che fluisce in un conduttore ai capi del quale è stabilità una differenza di potenziale V è data da

$$W = Vi$$

se il conduttore è ohmico, questa relazione si può riscrivere come

$$W = Ri^2$$

quindi la potenza dissipata è proporzionale alla resistenza e al quadrato della corrente elettrica.