Capitolo I

Grandezze fisiche

§ 1.1 Grandezze fisiche

Ogni grandezza fisica deve essere definita attraverso un processo di misura (definizione operativa). Date due grandezze omogenee, deve sempre essere possibile stabilire se sono uguali o quale delle due sia maggiore e quale minore. Scelta una particolare grandezza come unità campione, la misura consiste nel determinare il rapporto fra la grandezza da misurare ed il campione. Esempio: la lunghezza di un tavolo.

Fino all'avvento della meccanica quantistica si riteneva che l'operazione di misura potesse essere effettuata senza influenzare il sistema misurato, almeno in via teorica. Ciò non è così ovvio, ed anzi in generale è vero il contrario: ogni volta che si effettua una misura, essa riguarda il sistema "oggetto da misurare+strumento di misura". Ad esempio, per misurare la temperatura di un volume d'acqua si deve immergere in esso un termometro, il quale però scambia calore con la massa d'acqua variandone la temperatura, cosicché alla fine la temperatura misurata è quella del sistema "acqua+termometro" e non della sola acqua. Si riteneva tuttavia che con opportuni artifizi tecnici si potesse ridurre a piacere tale influenza sino a renderla sempre trascurabile. La meccanica quantistica invece ha mostrato come esista un limite teorico invalicabile all'influenza dell'operazione di misura sul sistema misurato. Tuttavia questo limite, pur sempre presente, è determinante solo quando si tratti di sistemi microscopici, mentre a livello macroscopico il suo impatto è trascurabile.

La descrizione dei fenomeni fisici è di tipo matematico. Per *legge fisica* si intende una relazione matematica fra due o più grandezze fisiche. Tale relazione è sempre frutto di prove sperimentali, ed è ritenuta valida finché un nuovo esperimento non dimostri il contrario. Si assume che valga il principio in base al quale se una legge fisica è valida devono essere valide tutte le conseguenze matematiche che derivano da tale legge: se anche una sola risulta sperimentalmente non verificata, anche la legge di partenza non può essere valida.

1.1.1 Grandezze fisiche e unità di misura

Per ogni grandezza fisica è necessario stabilire una *unità di misura*, ovvero una grandezza omogenea scelta come campione: il valore di una grandezza sarà allora il rapporto fra questa grandezza e l'unità campione. Si può decidere di adottare unità indipendenti per ciascuna grandezza, ma questa scelta è scomoda dal punto di vista operativo. Si preferisce allora scegliere alcune unità di misura, dette *unità fondamentali*, come grandezze indipendenti: le altre, dette *unità derivate*, vengono determinate a partire dalle leggi fisiche che le legano alle grandezze fondamentali. Ad esempio, poiché l'area di una superficie è sempre in qualche modo legata al prodotto di due unità di lunghezza, è inutile scegliere una unità campione indipendente per l'area, giacché la si può definire a partire dall'unità campione della lunghezza.

La scelta delle unità di misura è in qualche modo arbitraria, e si tende a scegliere quelle la cui determinazione sperimentale garantisce un più alto grado di riproducibilità e affidabilità. Questa scelta costituisce un *sistema di unità di misura*.

Il sistema standard solitamente utilizzato nella Fisica moderna è il *Sistema Internazionale* (*SI*): esso sceglie come unità fondamentali la lunghezza, la cui unità è il metro (m), il tempo, la cui unità è il secondo (s), la massa, con unità il kilogrammo (kg), l'intensità di corrente, con unità l'ampere (A), e l'intervallo di temperatura, con unità il grado Kelvin (°K) (alcune altre grandezze vengono definite come fondamentali, ma sono meno essenziali). Di ognuna di esse viene pure definita con estrema precisione come riprodurre l'unità campione. Un altro sistema di unità di misura adottato in passato è il *sistema CGS* o *di Gauss*, che adotta come unità fondamentali la lunghezza, con unità il centimetro (cm), il tempo, con unità il secondo (s), la massa, con unità il grammo (g), e l'intervallo di temperatura, con unità il grado Celsius (°C) (in questo sistema le unità elettriche sono derivate dalle sole unità meccaniche).

§ 1.2 Grandezze scalari e vettoriali

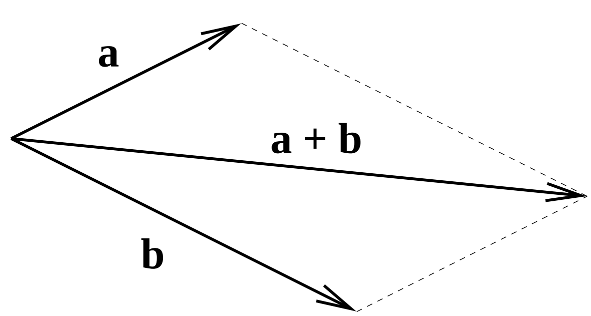
Per alcune grandezze fisiche è sufficiente fornire il loro valore per determinarle senza ambiguità. Ad esempio, se si dice che in un certo punto della stanza c'è una temperatura di 20°C, questa informazione è sufficiente per stabilirne il significato fisico. Ciò non è vero per tutte le grandezze: se per esempio si afferma di aver effettuato uno spostamento di 2 metri, questa informazione non è sufficiente da sola a determinare la posizione finale dopo lo spostamento. In questo caso occorre specificare anche la direzione, la retta lungo cui avviene tale spostamento; e poiché su una retta sono possibili due versi opposti, è necessario esplicitare pure il verso dello spostamento: solo con la conoscenza di questi tre elementi è possibile determinare il significato fisico dell'affermazione fatta, cioè la posizione finale dopo lo spostamento.

Le grandezze che sono univocamente determinate dalla sola conoscenza della loro intensità vengono dette *grandezze scalari*: ne sono un esempio il tempo, la massa, la temperatura, la carica elettrica. Le grandezze che per essere univocamente determinate richiedono l'indicazione della loro intensità (detta *modulo*), della loro direzione e del loro verso vengono dette *grandezze vettoriali*: ne sono un esempio lo spostamento, la velocità, la forza, il campo elettrico. I primi sono rappresentati da numeri, i secondi da vettori.

1.2.1 Somma di vettori; prodotto scalare; prodotto vettoriale

La somma di due scalari omogenei è banalmente la somma algebrica dei loro valori. Analogamente il prodotto di due grandezze scalari è una nuova grandezza scalare il cui valore è il prodotto dei valori delle grandezze scalari date.

La somma di due vettori omogenei è invece più complessa, ed è data dal vettore che giace sulla diagonale del parallelogramma determinato dai due vettori addendi (*regola del parallelogramma*)



La somma così definita gode della proprietà associativa, per cui dati tre vettori

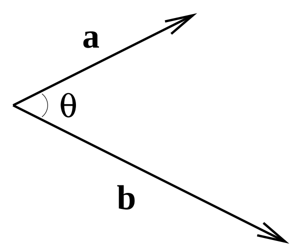
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Il prodotto di un vettore per uno scalare è dato da un vettore avente la stessa direzione e lo stesso verso, e modulo pari al prodotto del modulo del vettore di partenza per il valore dello scalare. In particolare il vettore -**a** è un vettore che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di **a** e verso opposto. Ciò permette di definire pure la differenza di due vettori come la somma del primo vettore per l'opposto del secondo

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

E' possibile definire due tipi di prodotto fra vettori, a seconda che il risultato finale sia uno scalare o un nuovo vettore. Il *prodotto scalare* (o *prodotto interno*) di due vettori è uno scalare dato dal prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo compreso fra loro

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\ b\ \cos\vartheta$$

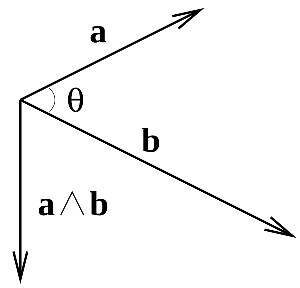


Il prodotto scalare è simmetrico: scambiando **b** con **a** il valore del prodotto scalare non cambia. Il prodotto scalare è nullo se uno dei due vettori è nullo, ma anche se pur essendo entrambi non nulli sono però perpendicolari, in quanto si ha $\vartheta = \pi/2$ e quindi $\cos\vartheta = 0$.

Il *prodotto vettoriale* (o *prodotto esterno*) di due vettori è un vettore* la cui direzione è perpendicolare al piano contenente i due vettori di partenza, il cui modulo è dato dal prodotto dei due moduli per il seno dell'angolo compreso fra loro, e il cui verso è dato dalla "regola della mano destra": aprendo pollice, indice e medio in modo che siano fra loro perpendicolari, se il pollice corrisponde al verso del primo vettore e l'indice al verso del secondo, il dito medio indica il verso del prodotto

* A rigore, uno pseudovettore.

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = a\ b\ \sin\vartheta$$

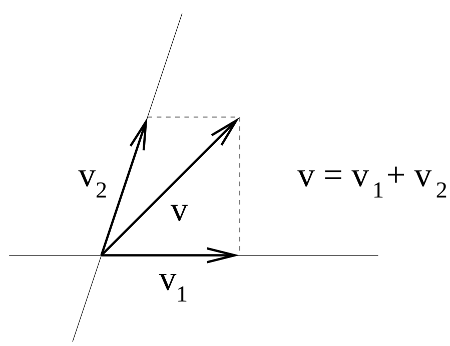


Il prodotto vettoriale è antisimmetrico: scambiando $\mathbf{b}$ con $\mathbf{a}$ il verso del vettore prodotto si inverte, com'è facile verificare usando la regola della mano destra. Il prodotto vettoriale è nullo se uno dei due vettori è nullo, ma anche se pur essendo entrambi non nulli sono però paralleli, in quanto si ha $\vartheta = 0$ e quindi $\sin\vartheta = 0$.

1.2.2 Componenti di un vettore in assi cartesiani

Si definisce *versore* di un vettore un vettore avente la stessa direzione e lo stesso verso del vettore dato e modulo unitario. Dato il vettore $\mathbf{a}$ il suo versore $\hat{\mathbf{a}}$ è dato dal rapporto fra $\mathbf{a}$ e il valore assoluto del suo modulo: $\hat{\mathbf{a}} = {}^{\mathbf{a}}\!/_{|a|}$.

Date due direzioni nello spazio, identificate dai versori $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$, è possibile proiettare un vettore $\mathbf{v}$ su di esse, ottenendo due vettori la cui somma è pari al vettore di partenza



Ciascuna componente è un vettore diretto lungo il versore del proprio asse e avente come modulo il prodotto scalare di $\mathbf{v}$ con il versore

$$\mathbf{v_1} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = v_1\hat{\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{v_2} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})\hat{\mathbf{b}} = v_2\hat{\mathbf{b}}$$

v_1 e v_2 sono dette *componenti* del vettore $\mathbf{v}$. Analogamente avviene se si hanno tre direzioni indipendenti.

Risulta comodo scegliere come direzioni lungo cui scomporre un vettore una terna di assi cartesiani XYZ, i cui versori sono indicati nell'ordine con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Le componenti di un vettore vengono dette allora *componenti cartesiane.*

Dati due vettori $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ è immediato verificare le seguenti relazioni:

- nella somma di due vettori le componenti del vettore somma sono date dalla somma delle componenti dei vettori addendi: il vettore somma $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ avrà componenti $v_x = a_x + b_x$, $v_y = a_y + b_y$ e $v_z = a_z + b_z$; analogamente la differenza di due vettori ha come componenti la differenza delle componenti dei due vettori di partenza;
- il prodotto di un vettore per uno scalare $\mathbf{v} = k\mathbf{a}$ è un vettore che ha per componenti il prodotto delle componenti per lo scalare $v_x = ka_x$, $v_y = ka_y$ e $v_z = ka_z$;
- il prodotto scalare di due vettori è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe di ciascun vettore: infatti, tenendo conto che i versori degli assi cartesiani sono ortogonali tra loro e di modulo unitario, si ha che $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$, e poiché il prodotto è distributivo rispetto alla somma, si ottiene

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- il modulo di un vettore è dato dalla radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- il prodotto vettoriale è un vettore che ha per componenti la differenza dei prodotti incrociati delle componenti non omologhe di ciascun vettore: infatti, tenendo conto che i versori degli assi cartesiani sono ortogonali tra loro e di modulo unitario, si ha che $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0$ e $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$, e poiché il prodotto è distributivo rispetto alla somma, si ottiene

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k}$$

quest'ultima relazione può essere scritta formalmente anche come il determinante che ha come prima riga i tre versori, come seconda riga le componenti del primo vettore e come terza riga le componenti del secondo vettore

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

1.2.3 Derivata, gradiente, divergenza, rotore

Se $\varphi(x)$ è uno scalare funzione di una variabile x è immediato definire la sua derivata $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ rispetto a x.

Se $\mathbf{a}(x)$ è un vettore funzione di una variabile x, la sua derivata $\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}x}$ è anch'essa un vettore.

Dato un campo scalare φ, il *gradiente* del campo è un campo vettoriale che ha per componenti le derivate parziali del campo scalare

$$\mathrm{grad}\ \varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Qualitativamente esso indica come varia il campo scalare nell'intorno di ogni punto dello spazio. Ad esempio, se $T(x, y, z)$ è una funzione che fornisce la temperatura in ogni punto di una stanza, ∇T in ogni punto è un vettore che fornisce informazioni su come varia la temperatura nell'intorno di tale, punto.

Dato un campo vettoriale $\mathbf{r}$, la *divergenza* del campo è un campo scalare dato dalla somma delle derivate parziali di ciascuna componente rispetto alla variabile corrispondente

$$\mathrm{div}\ \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}$$

Qualitativamente esso indica come varia il campo vettoriale nell'intorno di ogni punto nella direzione del campo. Ad esempio, se $\mathbf{v}(x, y, z)$ è una funzione che esprime la velocità in ogni punto dell'acqua che scorre in un fiume, $\nabla \cdot \mathbf{v}$ in ogni punto è uno scalare che fornisce informazioni su come varia lungo la corrente del fiume (come "diverge") il flusso d'acqua nell'intorno di tale punto.

Dato un campo vettoriale $\mathbf{r}$, il *rotore* del campo è un campo vettoriale che ha per componenti la differenza delle derivate parziali di ciascuna componente rispetto alle altre due variabile

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{r} = \nabla \wedge \mathbf{r} = \left(\frac{\partial r_y}{\partial z} - \frac{\partial r_z}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial r_z}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial r_x}{\partial y} - \frac{\partial r_y}{\partial x}\right)\mathbf{k}$$

Qualitativamente esso indica come varia il campo vettoriale nell'intorno di ogni punto nelle direzioni ortogonali al campo. Ad esempio, se $\mathbf{v}(x, y, z)$ è una funzione che esprime la velocità in ogni punto dell'acqua che scorre in un fiume, $\nabla \wedge \mathbf{v}$ in ogni punto è uno vettore che fornisce informazioni su come varia nelle direzioni ortogonali alla corrente del fiume (come "ruota") il flusso d'acqua nell'intorno di tale punto.