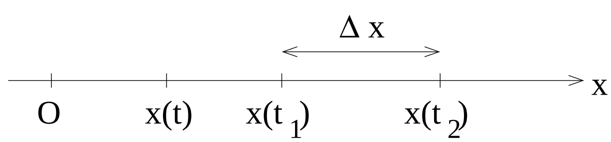
Capitolo II

Cinematica

§ 2.1 Moto in una dimensione

La cinematica studia i moti indipendentemente dalle loro cause. Il corpo soggetto al moto è il *punto materiale*, una astrazione per cui si trascurano le dimensioni del corpo che per l'appunto viene considerato puntiforme.

Si consideri innanzitutto il moto in una dimensione, cioè solamente lungo l'asse x: la posizione del punto $x = x(t)$ sarà una funzione del tempo t



Se il punto materiale occupa la posizione $x_1 = x(t_1)$ all'istante t_1 e la posizione $x_2 = x(t_2)$ all'istante t_2, allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ lo spostamento del punto materiale sarà pari a $\Delta x = x_2 - x_1$. Si definisce *velocità media* il rapporto

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocità media però non è molto indicativa dello svolgimento del moto; se tuttavia si prendono intervalli di tempo Δt sempre più piccoli, si ottengono informazioni sempre più dettagliate. Si definisce allora *velocità istantanea* il limite per Δt che tende a zero (cioè per intervalli di tempo infinitesimi) della velocità media

$$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

cioè la velocità istantanea è la derivata prima dello spostamento rispetto al tempo.

Essendo un rapporto fra uno spazio ed un tempo, la velocità è una grandezza derivata, e nel SI si misura in m/s.

Anche la velocità è in generale una funzione del tempo $v = v(t)$. Se all'istante t_1 la velocità del punto materiale è $v_1 = v(t_1)$ e all'istante t_2 è $v_2 = v(t_2)$, il rapporto fra la variazione della velocità $\Delta v = v_2 - v_1$ e l'intervallo di tempo Δt si definisce *accelerazione media*

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Essa indica la variazione media di velocità nell'intervallo di tempo considerato. Anche questa quantità non è di per sè particolarmente significativa, ma di nuovo se si prendono intervalli di tempo Δt sempre più piccoli, si ottengono informazioni sempre più dettagliate. Si definisce allora *accelerazione istantanea* il limite per Δt che tende a zero (cioè per intervalli di tempo infinitesimi) dell'accelerazione media

$$a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

cioè l'accelerazione istantanea è la derivata prima della velocità rispetto al tempo, e quindi la derivata seconda dello spostamento rispetto al tempo; essa indica la variazione istantanea della velocità all'istante di tempo considerato.

Essendo un rapporto fra una velocità ed un tempo, anche l'accelerazione è una grandezza derivata, e nel SI si misura in m/s^2.

Pure l'accelerazione è in generale una funzione del tempo $a = a(t)$. Si potrebbe pensare allora di proseguire costruendo il rapporto $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ e così sia. Si vedrà però trattando della Dinamica che le cause del moto sono legate alla sola accelerazione, e quindi la conoscenza dell'accelerazione in funzione del tempo è sufficiente a ricostruire il moto di un corpo.

Nota l'accelerazione $a(t)$ ad ogni istante, la velocità del punto materiale si ottiene per integrazione diretta

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t')\ dt' + v_0$$

In questo modo l'andamento della velocità è noto a meno di una costante di integrazione: quindi per determinare la velocità ad ogni istante t è necessario conoscerne il valore v_0 ad un preciso istante t_0. Ciò in quanto $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ è un'equazione differenziale del prim'ordine e quindi richiede la conoscenza di una condizione iniziale.

Data la velocità $v(t)$ ad ogni istante, la posizione del punto materiale si ottiene con una nuova integrazione

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t')\ dt' + x_0$$

Di nuovo per determinare univocamente la posizione del punto è necessaria la conoscenza della posizione x_0 ad un determinato istante t_0 (non necessariamente lo stesso della velocità v_0): infatti anche $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ è un'equazione differenziale del prim'ordine e quindi richiede la conoscenza di una condizione iniziale. In definitiva per determinare univocamente il moto di un punto materiale a partire dall'accelerazione sono necessarie due condizioni iniziali*.

2.1.1 Un esempio: la caduta dei gravi

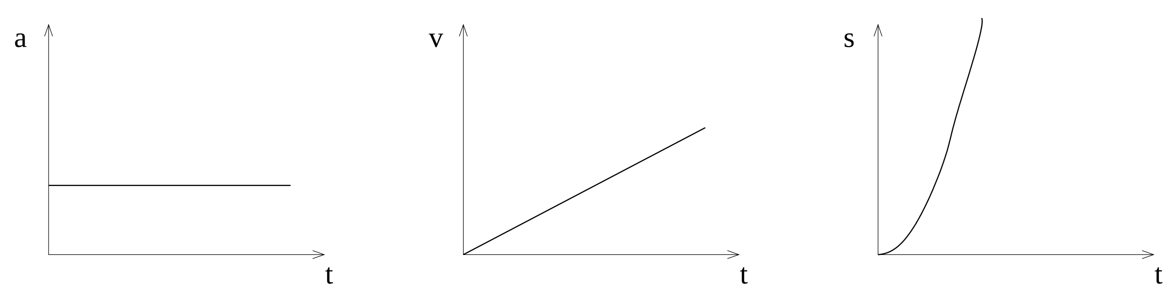
Come primo semplice esempio si consideri la caduta libera di un grave sulla superficie terrestre: il grave si muove con accelerazione costante pari all'accelerazione di gravità $g = 9.8\ m/s^2$. Allora, supponendo che il corpo parta da fermo all'istante $t_0 = 0$ si ha

$$a(t) = g \quad \text{cost}$$

$$v(t) = \int_0^t g\ dt' = gt$$

$$x(t) = \int_0^t v(t')\ dt' = \int_0^t gt'\ dt' = \frac{1}{2}gt^2$$

L'andamento della velocità è lineare nel tempo, l'andamento dello spostamento è parabolico

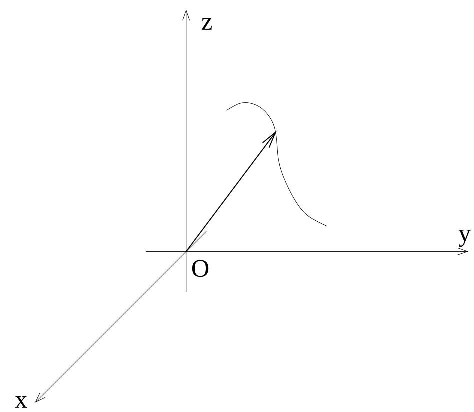


Questo esempio sarà ripreso con maggior rigore alla fine del capitolo.

* D'altra parte $a = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ è un'equazione differenziale del second'ordine, che per essere risolta richiede la conoscenza di due condizioni iniziali.

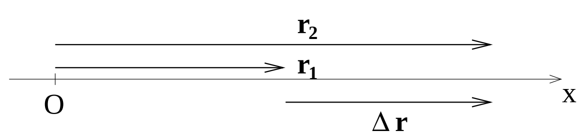
§ 2.2 Moto in una e in tre dimensioni con i vettori

In generale il moto di un corpo avviene nello spazio tridimensionale. Si consideri allora una terna di assi cartesiani ortogonali: in questo sistema di riferimento la posizione istante per istante del corpo può essere indicata da un vettore $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, detto per l'appunto *vettore posizione*, funzione del tempo



2.2.1 Moto lungo un asse

Si consideri prima un caso semplice, in cui il moto avviene lungo l'asse X: in questo caso il vettore posizione giace sempre sull'asse delle ascisse. Se all'istante t_1 la posizione del punto materiale è identificata dal vettore $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ e all'istante t_2 dal vettore $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$, si può definire il *vettore spostamento* $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ che indica di quanto e in che direzione si è spostato il punto in esame nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$



(per chiarezza i tre vettori sono disegnati separati, ma ovviamente devono essere pensati tutti sullo stesso asse X). In maniera analoga al caso unidimensionale, si definisce *velocità media* il rapporto

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

esso è ovviamente un vettore, essendo dato da un vettore ($\Delta\mathbf{r}$) moltiplicato per uno scalare ($1/\Delta t$), ed ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\Delta\mathbf{r}$ cioè lungo l'asse X. Se poi si fa tendere Δt a zero, da questo rapporto si ottiene la *velocità istantanea*

$$\mathbf{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

la quale è anch'essa un vettore avente stessa direzione e stesso verso di $\mathbf{r}$, ovvero lungo l'asse delle ascisse.

All'istante t_1 la velocità del punto materiale sia $\mathbf{v}_1$ e all'istante t_2 sia $\mathbf{v}_2$. Sempre in analogia al caso unidimensionale, il rapporto

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

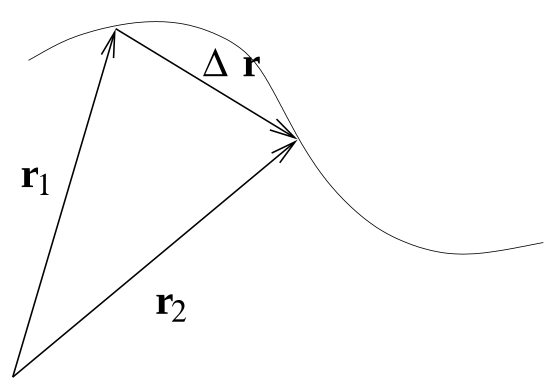
viene detto *accelerazione media*, ed è un vettore avente la stessa direzione di $\mathbf{v}$ (e quindi di $\mathbf{r}$), e lo stesso verso di $\mathbf{v}$ se la velocità mediamente aumenta nell'intervallo Δt, verso opposto se la velocità mediamente diminuisce. Il limite per Δt che tende a zero è la *accelerazione istantanea*

$$\mathbf{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

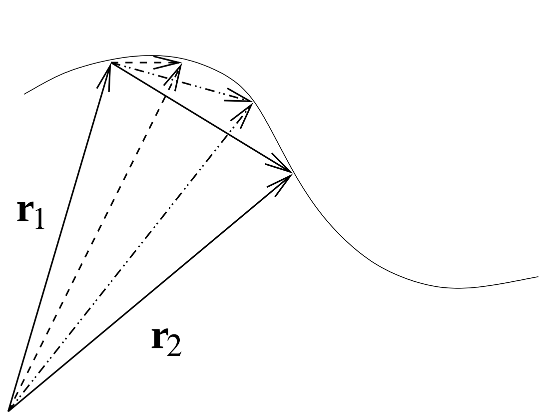
che ha anch'essa stessa direzione di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}$, e verso concorde oppure opposto al verso di $\mathbf{v}$ a seconda che la velocità aumenti o diminuisca all'istante t.

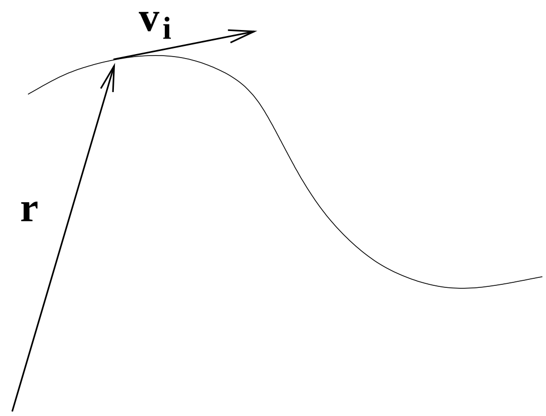
2.2.2 Caso generale

In generale il moto avviene lungo una curva generica (detta *traiettoria del moto*). E' però ancora possibile definire il vettore spostamento $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, se $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ sono le posizioni del punto materiale a due istanti t_1 e t_2



Il rapporto $\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ esprime ancora la velocità media del punto materiale, ed è ancora un vettore, anche se ora ha direzione indipendente da quella di $\mathbf{r}$. Il limite per Δt che tende a zero è ancora il vettore velocità istantanea $\mathbf{v}_i$; esso ha una direzione particolare: si nota infatti che al tendere di Δt a zero, e quindi al tendere di $\mathbf{r}_2$ verso $\mathbf{r}_1$, il vettore $\Delta \mathbf{r}$ tende ad essere tangente alla traiettoria





e in effetti è possibile dimostrare matematicamente che il vettore velocità istantanea è sempre tangente alla traiettoria nel punto considerato

Per determinare l'espressione esplicita del vettore velocità istantanea, si consideri che

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}\ \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove Δs è l'arco di traiettoria percorso dal punto materiale nell'intervallo di tempo Δt. Ora al tendere di Δt a zero anche Δs tende a zero; ma

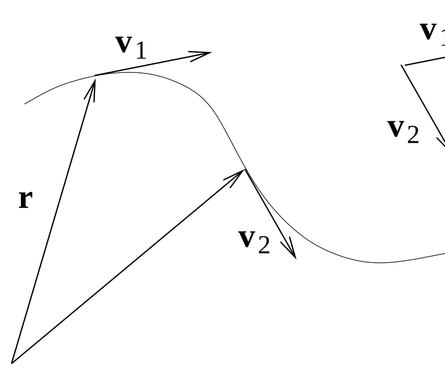
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_i$$

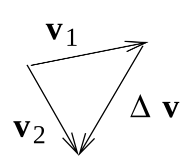
infatti questo limite è la velocità istantanea lineare, misurata cioè lungo la traiettoria. Invece si può dimostrare che

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \hat{\tau}$$

dove $\hat{\tau}$ è un versore, ovvero un vettore di modulo unitario, tangente alla traiettoria nel punto considerato (che $|\hat{\tau}| = 1$ si può anche intuire dal fatto che al tendere di Δs a zero, $\Delta \mathbf{r}$ e Δs tendono ad avere la stessa lunghezza).

All'istante t_1 la velocità del punto materiale è rappresentata dal vettore $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1)$, mentre all'istante t_2 essa è data dal vettore $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(t_2)$. Si può allora definire il vettore variazione di velocità $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$





e quindi il vettore accelerazione media $\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$: esso è un vettore avente la stessa direzione e lo stesso verso di $\Delta \mathbf{v}$. Il suo limite per Δt che tende a zero è il vettore accelerazione istantanea. Esso non ha una direzione particolare (a differenza del vettore velocità istantanea che è sempre tangente alla traiettoria), ma è comunque sempre diretto verso la concavità interna della curva.

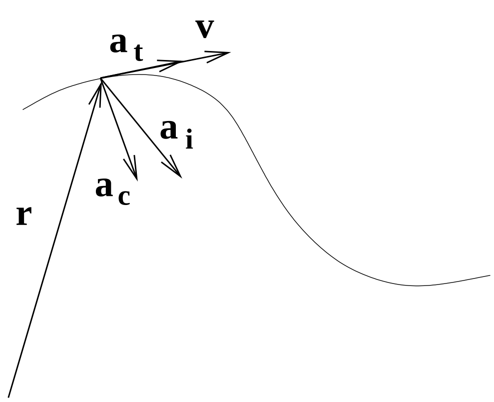
Il vettore accelerazione istantanea si può scomporre in due componenti: infatti si ha

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v\hat{\tau} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

Ora è possibile dimostrare matematicamente che la derivata del vettore $\hat{\tau}$ è pari a $\frac{v}{R}\hat{u}$, dove $\hat{u}$ è un versore diretto verso il centro di curvatura della traiettoria nel punto considerato e R è il raggio di curvatura sempre nel punto in esame. Pertanto

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} + \frac{v^2}{R}\hat{u} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c$$

il primo termine è l'*accelerazione tangenziale* ed esprime la variazione del modulo del vettore velocità, il secondo è l'*accelerazione centripeta* ed esprime la variazione della direzione del vettore velocità



Infatti essendo la velocità un vettore, può cambiare sia in modulo sia in direzione: le due componenti dell'accelerazione rappresentano questi due contributi.

§ 2.3 Composizione dei moti

Finora si è considerato il caso di un punto materiale sottoposto ad un solo moto. Tuttavia è possibile che uno stesso punto sia soggetto a più moti contemporaneamente: in questo caso il moto complessivo sarà uguale alla somma dei moti componenti, ovvero la posizione ad un certo istante dovuta al moto complessivo è la stessa che il corpo avrebbe se fosse sottoposto a tutti i moti componenti uno alla volta.

Un caso particolarmente importante è quello in cui il punto materiale è soggetto a due moti su uno stesso asse. In questo caso istante per istante si ha $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$; per semplice derivazione si ottiene allora

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \qquad \text{e} \qquad a(t) = a_1(t) + a_2(t)$$

cioè così come i moti anche le velocità e le accelerazioni si sommano*.

§ 2.4 Moti particolari

2.4.1 Moto rettilineo uniforme

Il moto rettilineo uniforme è caratterizzato dall'avere velocità costante come vettore, $\mathbf{v} = \text{cost}$: quindi integrando

$$\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}dt' = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0$$

Il moto avviene quindi lungo una retta, data dalla direzione di $\mathbf{v}$. Si tratta di un moto unidimensionale, quindi per semplicità si può scegliere uno degli assi del sistema di riferimento lungo la direzione del moto: in tal modo le equazioni si semplificano in

$$v = \text{cost}$$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} vdt' = vt + x_0$$

dove x_0 è la posizione del punto materiale all'istante t_0.

2.4.2 Moto uniformemente accelerato

Nel moto uniformemente accelerato è invece il vettore accelerazione a mantenersi costante, $\mathbf{a} = \text{cost}$: quindi integrando

$$\mathbf{v} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}dt' = \mathbf{a}t + \mathbf{v}_0$$

* Ciò non è più vero nella meccanica relativistica, cioè quando le velocità in gioco sono comparabili con la velocità della luce.

$$\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v} dt' = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

Se $\mathbf{v}_0$ ha la stessa direzione di $\mathbf{a}$ o se è nullo, allora anche in questo caso il moto avviene lungo una retta, data dalla direzione di $\mathbf{a}$: infatti $\mathbf{v}$ pur mutando di modulo mantiene la stessa direzione. Quando ciò avviene, si può scegliere uno degli assi del sistema di riferimento lungo la direzione del moto: in tal modo le equazioni si semplificano in

$$a = \text{cost}$$

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a dt' = at + v_0$$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v dt' = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

dove v_0 e x_0 sono rispettivamente la velocità lineare e la posizione del punto materiale all'istante t_0.

Nel caso particolare in cui $v_0 = 0$, cioè se il corpo parte da fermo, si hanno alcune relazioni notevoli (si scelga opportunamente il sistema di riferimento in modo tale che sia $x_0 = 0$): il tempo necessario a percorrere un tratto s è dato dalla soluzione dell'equazione

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

ovvero

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

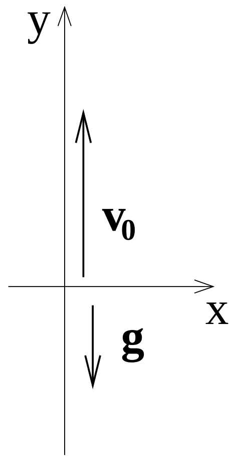
mentre la velocità acquisita dal punto materiale dopo un tratto s è

$$v = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2as}$$

Formule analoghe, ovviamente più complesse, valgono nel caso in cui la velocità iniziale non sia nulla.

2.4.3 Moto di un grave verso l'alto

Si è già studiata l'equazione del moto di un grave in caduta libera verso il basso. Si supponga ora di lanciare un grave verso l'alto con una velocità iniziale v_0: se si sceglie come riferimento un asse verticale diretto verso l'alto e con l'origine nel punto in cui, all'istante



$t_0 = 0$, viene lasciato il grave, ad ogni istante la velocità del punto materiale sarà data da

$$v = v_0 - gt$$

e la posizione da

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Il grave inizialmente sale, con velocità sempre decrescente, fino a fermarsi. E' possibile determinare l'altezza massima a cui sale: infatti a tale altezza il grave si ferma, quindi $v = 0$; ciò avviene all'istante $t_1 = \frac{v_0}{g}$, il che corrisponde a

$$h = y(t_1) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

Quindi il grave comincia a cadere di moto accelerato. L'istante in cui ripassa per l'origine, cioè per il punto dal quale era stato lanciato, si può ricavare dall'equazione

$$y(t_2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0$$

che ha due soluzioni, $t_2 = 0$, che in realtà corrisponde all'istante iniziale, e $t_2 = \frac{2v_0}{g}$, cioè il doppio di t_1: pertanto il tempo $t_2 - t_1$ che il grave impiega a cadere dal punto di massima altezza h al punto da cui era stato lanciato è pari al tempo impiegato dal grave a salire dal punto di lancio al punto di massima altezza. Inoltre la velocità che il grave possiede quando ripassa dall'origine vale

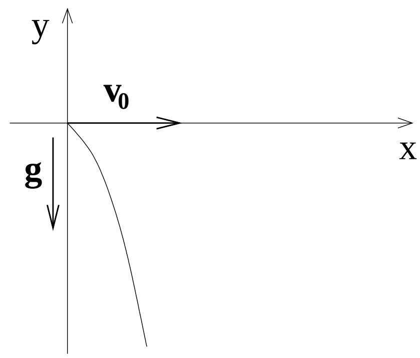
$$v_2 = v(t_2) = v_0 - g t_2 = -v_0$$

essa è pari in valore assoluto alla velocità con cui era stato lanciato, ed ha ovviamente verso opposto.

Queste considerazioni verranno riprese discutendo dell'energia di un grave in caduta.

2.4.4 Moto parabolico

Invece che verso l'alto, si supponga di lanciare un grave orizzontalmente con velocità v_0: esso sarà sottoposto allora a due moti, uno rettilineo uniforme lungo l'asse X ed uno rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse Y



Infatti l'accelerazione di gravità g agisce solo lungo la direzione delle ordinate e non ha alcun effetto lungo le ascisse: quindi la componente X della velocità rimane costante. Allora i due moti cui è sottoposto il punto materiale sono dati da

$$v_x = v_0 \qquad ; \qquad x = v_0 t$$

e

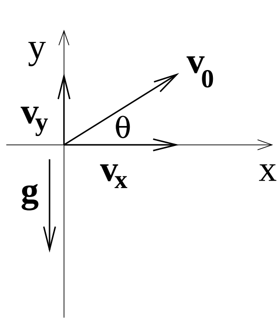
$$v_y = -gt \qquad ; \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2$$

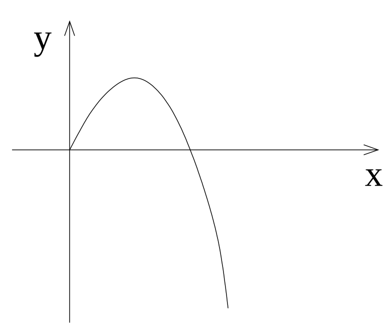
Per ottenere l'equazione della traiettoria è sufficiente eliminare la variabile t dalle due equazioni del moto: dalla prima si ottiene $t = x/v_0$, che sostiuita nella seconda fornisce

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2 = ax^2 \qquad , \qquad a < 0$$

si tratta quindi di una parabola passante per l'origine e avente la concavità rivolta verso il basso.

Come caso più generale, si supponga di lanciare il grave con una certa velocità $\mathbf{v}_0$ formante un angolo ϑ con l'orizzontale





in questo caso si ha la composizione di due moti rettilinei, uno uniforme lungo l'asse X con velocità costante $v_x = v_0 \cos\vartheta$, ed uno uniformemente accelerato lungo l'asse Y con velocità iniziale $v_y = v_0 \sin\vartheta$ diretta verso l'alto. Infatti anche in questo caso l'accelerazione di gravità g agisce solo lungo la direzione delle ordinate e non ha alcun effetto lungo le ascisse: quindi la componente X della velocità rimane costante. Allora i due moti cui è sottoposto il punto materiale sono dati da

$$v_x = v_0 \cos\vartheta \quad ; \quad x = v_0 \cos\vartheta \ t$$

e

$$v_y = v_0 \sin\vartheta - gt \quad ; \quad y = v_0 \sin\vartheta \ t - \frac{1}{2} g t^2$$

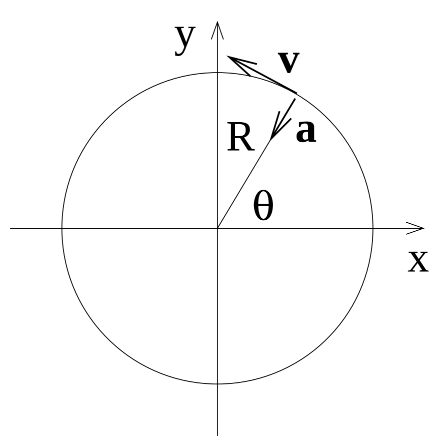
Di nuovo per ottenere l'equazione della traiettoria è sufficiente eliminare la variabile t dalle due equazioni del moto: dalla prima si ottiene $t = x/v_0 \cos\vartheta$, che sostituita nella seconda fornisce

$$y = \tan\vartheta \ x - \frac{1}{2} \frac{g}{(v_0 \cos\vartheta)^2} x^2 = ax^2 + bx \quad , \quad a < 0$$

quindi nuovamente una parabola passante per l'origine e avente la concavità rivolta verso il basso, ma con un tratto verso l'alto. In maniera analoga a quanto fatto nel caso del lancio di un grave verso l'alto, è possibile determinare l'altezza massima raggiunta dal punto materiale; inoltre è semplice ricavare l'ascissa del punto in cui il grave tocca nuovamente terra (la cosiddetta *gittata*).

2.4.5 Moto circolare uniforme

Il moto circolare è quello seguito da un punto materiale che si muove su una circonferenza di raggio R



L'angolo $\vartheta = \vartheta(t)$ che il raggio vettore forma con la direzione positiva dell'asse delle X è in generale una funzione del tempo. La sua derivata allora esprime la *velocità angolare*, cioè il tasso di variazione dell'angolo ϑ (in perfetta analogia con la velocità lineare)

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}$$

Anche $\omega = \omega(t)$ è in generale una funzione del tempo: si può allora definire una *accelerazione angolare* come derivata nel tempo della velocità angolare (in analogia all'accelerazione lineare)

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}t^2}$$

Se però il punto materiale descrive archi uguali in tempi uguali, ovvero se la velocità angolare ω è costante, allora il moto circolare è detto uniforme.

La velocità lineare del punto materiale sulla circonferenza è un vettore $\mathbf{v}$ sempre tangente alla circonferenza e di modulo

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\vartheta) = R\omega$$

quindi è un vettore di modulo costante. L'accelerazione poi è un vettore diretto verso il centro del cerchio: infatti la componente tangenziale dell'accelerazione è nulla, essendo pari a $\mathbf{a}_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t\ \hat{\tau}$, e $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$ poichè il modulo della velocità è costante. Rimane quindi la sola componente centrifuga, di modulo

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Si noti che pur essendo un moto uniforme, la velocità non è costante e l'accelerazione non è nulla: infatti ciò che è costante è solo il modulo della velocità, ma si tratta di un vettore la cui direzione nello spazio varia da punto a punto, e quindi non è un vettore costante; l'accelerazione poi ha solo componente centrifuga, il cui effetto è appunto quello di modificare la direzione del vettore velocità senza mutarne il modulo.

Se il moto circolare è uniforme, la velocità angolare ω è costante, e pari a

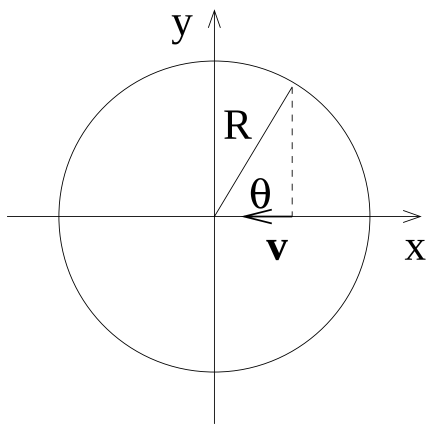
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

dove T è il *periodo*, cioè il tempo necessario a compiere un giro completo; la velocità angolare si misura in *rad/s*. Si definisce *frequenza* del moto circolare uniforme l'inverso del periodo, ovvero il numero di giri completi nell'unità di tempo

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

2.4.6 Moto armonico

Il moto armonico è il moto seguito da un punto materiale che è proiezione di un punto che si muove di moto circolare uniforme



Ad ogni istante quindi la posizione del punto è data da

$$x(t) = R\cos\vartheta = R\cos(\omega t)$$

Il massimo spostamento dall'origine è in valore assoluto pari a R, e prende nome di *elongazione* del moto armonico. La velocità di questo moto si ricava da

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin(\omega t)$$

e quindi è sfasata con la posizione: dove la posizione è massima la velocità è nulla e viceversa. Infine l'accelerazione è

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

Si noti che ad ogni istante l'accelerazione è proporzionale allo spostamento a meno di una costante negativa: si può anzi dimostrare (per integrazione diretta) che ogni volta che un moto è caratterizzato dall'avere un'accelerazione sempre proporzionale al suo spostamento secondo una costante negativa, il moto è armonico.

Anche il moto armonico è caratterizzato da un periodo T, da una frequenza $\nu = 1/T$ e da una *pulsazione* $\omega = 2\pi\nu$.