Capitolo III

Dinamica

§ 3.1 Le forze

Di forza si ha un concetto intuitivo, come pure dei suoi effetti: se si applica uno "sforzo" su un corpo, questo si mette in moto oppure si deforma. Movimento e deformazione sono i classici effetti di una forza.

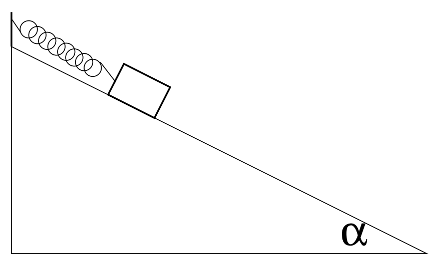
Chiaramente però è necessaria una definizione precisa e riproducibile di forza. Per farlo concettualmente si usa la deformazione di una molla campione. Infatti applicando una forza ad una molla, questa si allunga: allora per definizione due forze si diranno uguali se provocano lo stesso allungamento; e se l'allungamento è diverso, si dirà più grande quella forza che provoca l'allungamento maggiore. Si possono così confrontare le forze. Si sceglie poi una forza campione, per esempio quella prodotta dal peso di un dato corpo. E' quindi possibile misurare le forze usando una molla tarata in questo modo (che prende il nome di *dinamometro*).

§ 3.2 I principî della dinamica

La Dinamica si occupa di studiare le cause del moto. Essa si basa su tre principî fondamentali, definiti con rigore da Newton, anche se già anticipati in qualche modo da Galileo.

Apparentemente l'osservazione sperimentale sembra confermare l'idea aristotelica secondo cui ogni corpo abbandonato a se stesso tende a fermarsi, e per mantenerlo in moto è necessario applicargli una forza. Ma ciò in realtà è dovuto al fatto che sulla Terra agiscono degli attriti, cioè delle forze che tendono ad opporsi al moto: sono queste che fermano un corpo in movimento. Se si cerca di eliminare questi impedimenti, si osserva che il corpo tende a muoversi sempre più a lungo a velocità costante. Tecnicamente non è possibile eliminare tutti gli attriti, ma si osserva questa tendenza quanto più essi vengono diminuiti, tanto da poter ritenere che se venissero effettivamente eliminati tutti gli impedimenti, un corpo in moto non si arresterebbe mai. D'altra parte se un corpo è inizialmente fermo, non si mette in moto se non sotto l'azione di un qualche stimolo. Si arriva in questo modo ad enunciare il *primo principio della dinamica* o *principio di inerzia*: un corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se non interviene una causa esterna a modificarne lo stato.

Quando il moto non è uniforme, un qualche tipo di forza deve agire sul corpo. Per determinare l'effetto di una forza sul moto, si cominci col considerare una forza costante, la forza peso. Per poterne variare l'intensità in maniera semplice, si usa un piano inclinato di cui si possa modificare l'angolo di inclinazione, sul quale è libero di muoversi un dato corpo



Innanzitutto si sposti l'insieme corpo più molla in diverse posizioni lungo il piano inclinato: la molla tarata permette di verificare come la forza sia costante lungo tutto il piano. Quindi si lascia libero il corpo, che cade di moto uniformemente accelerato, e se ne misura l'accelerazione. Poi si varia l'angolo di inclinazione α del piano inclinato cambiando così l'intensità della forza che agisce sul corpo. Mediante la misura dell'allungamento della molla si verifica che l'intensità della forza è legata all'angolo di inclinazione dalla relazione

$$F = F_g \sin\alpha$$

come deve essere da semplici considerazioni geometriche; qui F_g è la forza peso quando il corpo è appeso verticalmente alla molla. Per varî angoli α_i si hanno diversi valori di forza

F_i agente sul corpo; per ognuno di essi il corpo acquista una accelerazione a_i diversa. Si verifica sperimentalmente che il rapporto fra l'intensità della forza cui è sottoposto il corpo e l'accelerazione che esso acquista è una costante

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \ldots = \frac{F_n}{a_n} = k$$

Questa costante è indipendente dalle condizioni del moto ed è una caratteristica del corpo: se si cambia il corpo in esame cambia la costante k ma rimane sempre vero che il rapporto F/a è una costante.

La costante di proporzionalità fra la forza (costante) che agisce su un corpo e l'accelerazione che questo acquista prende il nome di *massa inerziale*: essa è una caratteristica di ciascun corpo che esprime la sua riluttanza a mutare le proprie condizioni di moto, ed è una costante indipendente dalle condizioni di moto*. Si può sintetizzare questa relazione con l'espressione

$$F = ma$$

La massa è una grandezza fondamentale; nel SI la sua unità di misura è il *chilogrammo massa*. La forza invece è una grandezza derivata; nel SI la sua unità di misura è il *newton*: si dice che una forza ha l'intensità di 1 newton quando applicata ad una massa di 1 chilogrammo le imprime un'accelerazione di 1 m/s^2 nella direzione di applicazione.

Questa relazione è stata sperimentalmente dimostrata per forze costanti nel tempo quali la forza peso. In generale tuttavia la forza che viene applicata ad un corpo varia nel tempo e così l'accelerazione che esso acquista. Quando la forza è variabile non è sempre semplice misurarla per poter calcolare il suo rapporto con l'accelerazione prodotta; anzi nei casi più generali potrebbe pure non essere possibile. Inoltre nell'esempio della forza peso questa relazione è stata verificata per i moduli di forza e accelerazione, ma queste grandezze sono vettori dotati anche di direzione e verso. Allora si assume questa relazione come principio, per verificarne poi le sue conseguenze; finora tutte le evidenze sperimentali ne

---

* Ciò non è più vero nella meccanica relativistica, dove la massa diventa una funzione della velocità. Fintantoché però la velocità del corpo si mantiene ben al di sotto della velocità della luce, la massa di fatto può essere considerata costante.

confermano la validità. Il *secondo principio della dinamica* afferma allora che ogniqualvolta una forza agisce su un corpo il suo effetto è quello di produrre un'accelerazione nella stessa direzione e nello stesso verso della forza e con modulo pari al rapporto fra il modulo della forza e la massa del corpo

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Questa relazione viene anche detta equazione fondamentale della dinamica giacché permette di determinare il moto di un corpo quando sia nota la risultante delle forze che agiscono su di esso. Si spiega così perché si definiscano solo le derivate prima (velocità) e seconda (accelerazione) della posizione e non le derivate successive: le cause del moto, cioè le forze, agiscono modificando solo l'accelerazione del corpo cui sono applicate.

Quando due corpi interagiscono fra loro, il primo produce una forza sul secondo e questi a sua volta ne produce una sul primo. Il *terzo principio della dinamica* afferma che quando due corpi interagiscono la forza prodotta dal primo sul secondo è uguale e contraria (ovvero ha la stessa direzione, verso opposto e lo stesso modulo) alla forza prodotta dal secondo corpo sul primo. Questo principio, detto anche *di azione e reazione*, a volte viene sintetizzato con la frase "ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria"; pur essendo sostanzialmente vera, questa frase nella sua brevità rischia di essere fuorviante, perché può risultare non chiaro quale sia la reazione e soprattutto a quale corpo essa è applicata. La formulazione data ("la forza che un corpo esercita su un altro è uguale e contraria alla forza che il secondo corpo esercita sul primo") è invece meno ambigua e più corretta.

Si definisce *sistema isolato* un corpo sul quale non agisce alcuna forza, o più in generale un insieme di corpi sui quali non agiscono forze esterne (su di essi possono al più agire le forze reciproche dei corpi facenti parte del sistema, forze che a due a due sono uguali e contrarie per il terzo principio della dinamica).

§ 3.3 Esempi di forze

3.3.1 Forza costante

Come primo esempio di consideri una forza costante $\mathbf{F}$. Essa imprime al corpo una accelerazione costante avente la stessa direzione e lo stesso verso della forza e modulo

$$a = \frac{F}{m}$$

quindi il corpo si muove di moto uniformemente accelerato. E' quanto avviene per la forza peso: in questo caso, scelto un sistema di riferimento cartesiano avente l'asse Y verticale e diretto verso basso, si ha

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = mg\mathbf{j}$$

dove al solito $\mathbf{j}$ rappresenta il versore dell'asse delle ordinate. Il corpo lasciato libero si muove di moto uniformemente accelerato verso il basso, con accelerazione g: quindi si ha

$$F = mg = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

che integrata due volte fornisce l'equazione del moto

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

3.3.2 Forza dipendente dalla velocità

Si consideri ora il caso di una forza che dipenda dalla velocità del corpo. Questa tipo di forze si manifestano quando un corpo si muove in un mezzo viscoso, ad esempio un oggetto che cade in aria o nell'acqua: il mezzo oppone al moto una forza (di attrito) che è proporzionale alla sua velocità. Si immagini lo stesso corpo del caso precedente che cade verticalmente in un mezzo viscoso: la forza cui è sottoposto è pari a

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} - k\mathbf{v} = (mg - kv)\mathbf{j}$$

dove k è una costante di proporzionalità avente le dimensioni di

$$[k] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{kg\ m}{s^2}\frac{s}{m} = \frac{kg}{s}$$

per garantire che il prodotto kv abbia le dimensioni corrette di una forza. L'equazione fondamentale della dinamica stabilisce che

$$F = mg - k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - g = 0$$

Si può dimostrare (per risoluzione diretta) che la soluzione di questa equazione differenziale del second'ordine è del tipo

$$y(t) = A + Bt + C\mathrm{e}^{-Dt}$$

da cui

$$y'(t) = B - CD\mathrm{e}^{-Dt}$$

$$y''(t) = CD^2\mathrm{e}^{-Dt}$$

e sostituendo rimane

$$CD^2\mathrm{e}^{-Dt} + \frac{k}{m}B - \frac{k}{m}CD\mathrm{e}^{-Dt} - g = 0$$

Questa relazione deve valere per ogni istante t, il che può avvenire solo se il coefficiente di e^{-Dt} e il termine noto sono ciascuno identicamente nulli: allora

$$\frac{k}{m}B - g = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad B = \frac{mg}{k}$$

e

$$CD^2 - \frac{k}{m}CD = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad D = \frac{k}{m}$$

(la soluzione $D = 0$ non è fisicamente accettabile, perché significherebbe un moto sempre rettilineo uniforme, il che non è possibile data la presenza di forze non in equilibrio). Pertanto l'equazione del moto è

$$y(t) = A + \frac{mg}{k}t + C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

si noti che il fattore mg/k ha le dimensioni corrette di una velocità, in modo che moltiplicandolo per un tempo si ottenga una lunghezza, mentre il fattore k/m ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, cosicché moltiplicandolo per un tempo si ottiene un numero puro: infatti gli argomenti delle funzioni (come l'esponenziale, il seno, e così via) devono essere adimensionali. I parametri A e C rimangono indeterminati, dipendendo dalle condizioni iniziali. Il moto è quindi la composizione di un moto rettilineo uniforme e di un moto che si estingue esponenzialmente. Per piccoli valori di t, cioè nei primissimi istanti del moto, sviluppando in serie l'esponenziale si ha

$$t \sim 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) \simeq A + \frac{mg}{k}t + C - C\frac{k}{m}t + C^2\left(\frac{k}{m}\right)^2 t^2 = a + bt + ct^2$$

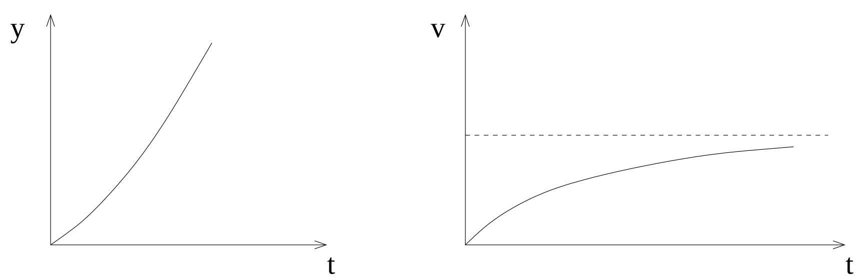
cioè all'inizio il moto è uniformemente accelerato: infatti essendo la velocità inizialmente piccola, la forza che le è proporzionale è trascurabile rispetto alla forza peso. Per grandi valori di t invece il moto è

$$t \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) \simeq A + \frac{mg}{k}t = a + bt$$

cioè il moto è rettilineo uniforme: infatti al crescere della velocità cresce anche la seconda forza, fino a compensare la forza peso; a quel punto la forza totale agente sul corpo è nulla e il moto prosegue rettilineo uniforme. Ciò si vede anche dall'espressione della velocità

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{mg}{k} - C\frac{k}{m}\mathrm{e}^{-\frac{mg}{k}t}$$

a piccoli istanti $v \simeq a + bt$ e quindi cresce linearmente; a grandi istanti invece $v \simeq \frac{mg}{k}$; questo valore prende nome di *velocità limite*. L'andamento della posizione e della velocità è qualitativamente



3.3.3 Forza elastica

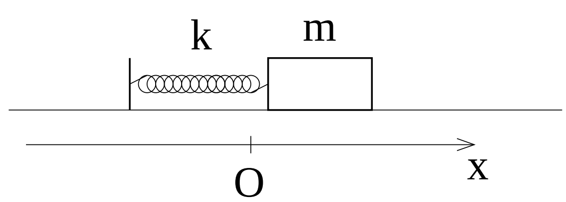
Alcuni materiali sottoposti ad una forza si deformano, e la loro deformazione è proporzionale all'intensità della forza applicata; quando la causa deformante cessa, essi riacquistano la forma originaria. Tali materiali vengono detti *elastici*.

Idealmente i materiali elastici seguono la *legge di Hooke*, secondo la quale la forza necessaria a provocare una data deformazione è linearmente proporzionale all'entità della deformazione; gli stessi materiali una volta deformati esercitano una forza che è proporzionale alla deformazione

$$F = -kx$$

(il segno meno significa che la forza si oppone alla deformazione). I materiali reali seguono la legge di Hooke solo per piccole deformazioni: quando la deformazione è notevole i materiali reali si discostano da tale relazione lineare, e una volta che cessa la causa deformante essi non riacquistano completamente la forma originaria. Nel seguito si considereranno solo piccole deformazioni tali per cui la legge di Hooke sia valida.

Si voglia studiare il moto di un corpo di massa m legato ad una molla di costante elastica k (che ha le dimensioni di N/m)



Per comodità si scelga un sistema di riferimento in cui l'origine O coincide con la posizione a riposo della molla. Quindi si provochi una deformazione x_0 alla molla e si lasci libera la massa: ad ogni istante si avrà

$$F = -kx = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x$$

si è quindi in presenza di un moto in cui l'accelerazione è sempre proporzionale secondo una costante negativa allo spostamento. Si è visto che ciò è caratteristico del moto armonico: quindi la massa m si muoverà di moto armonico, ovvero oscillerà intorno alla posizione di equilibrio, secondo la legge del moto

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

La fase iniziale φ dipende dalla scelta dell'origine dei tempi, e può essere messa a zero senza perdita di generalità; l'elongazione massima invece dipende dallo spostamento iniziale. Il periodo di oscillazione della massa dipende dalla pulsazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

la frequenza del moto è quindi $\nu = 1/T$; si noti come il periodo dipende dalla massa e dalla costante elastica della molla ma non dallo spostamento iniziale: a parità di costante elastica masse più grandi hanno periodi maggiori, cioè oscillano più lentamente; a parità di massa costanti elastiche più grandi producono periodi più piccoli, cioè oscillano più velocemente; però a parità di massa e costante elastica, le oscillazioni hanno lo stesso periodo qualunque sia l'allungamento iniziale della molla.

Come caso ipotetico si consideri invece una forza proporzionale allo spostamento del tipo $F = kx$: essa porta all'equazione

$$F = kx = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{k}{m}x = \omega^2 x$$

Si può dimostrare (per risoluzione diretta) che la soluzione di questa equazione è del tipo

$$x(t) = A\mathrm{e}^{\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\beta t}$$

infatti derivando si ottiene

$$x'(t) = A\alpha\mathrm{e}^{\alpha t} - B\beta\mathrm{e}^{-\beta t}$$

$$x''(t) = A\alpha^2\mathrm{e}^{\omega t} + B\beta^2\mathrm{e}^{-\beta t}$$

e sostituendo rimane

$$A\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha t} + B\beta^2\mathrm{e}^{-\beta t} = A\omega^2\mathrm{e}^{\alpha t} + B\omega^2\mathrm{e}^{-\beta t}$$

e siccome questa relazione deve valere ad ogni istante t, si ricava

$$\alpha = \beta = \omega$$

mentre A e B sono determinate dalle condizioni iniziali. Questo tipo di moto tuttavia non è reale, in quanto presuppone che al crescere del tempo lo spostamento e la velocità crescano in maniera esponenziale senza limiti.

§ 3.4 Impulso e quantità di moto

Si supponga che una forza $\mathbf{F}$ agisca tra un istante t_1 ed un istante t_2. Si definisce *impulso elementare* la quantità $\mathbf{F}\mathrm{d}t$, e *impulso della forza* l'integrale

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathrm{d}t$$

Ora però $\mathbf{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$, e quindi $\mathbf{F}\mathrm{d}t = m\mathrm{d}\mathbf{v}$, e pertanto

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathrm{d}t = \int_{v_1}^{v_2} m\mathrm{d}\mathbf{v} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

Il prodotto $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$ prende nome di *quantità di moto*: si è dimostrato così il *teorema dell'impulso*

$$\mathbf{I} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = \Delta\mathbf{q}$$

ovvero quando una forza agisce per un certo periodo di tempo, il suo impulso è pari alla variazione della quantità di moto del corpo su cui la forza agisce. Questa relazione è particolarmente utile quando la forza varia rapidamente in un breve tempo, per cui è difficile conoscerne la forma $\mathbf{F}(t)$ in maniera esatta.

Avendo definito la quantità di moto, si può riscrivere il secondo principio della dinamica come

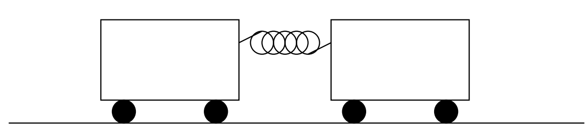
$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}$$

Questa relazione è più generale di $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ in quanto è valida anche quando la massa del corpo non è costante (ad esempio, un razzo che sta perdendo propellente, oppure una goccia d'acqua che cadendo in un ambiente umido aumenta la propria massa).

Su un sistema isolato non agiscono forze esterne, quindi $\mathbf{F} = \mathbf{0}$: ma allora

$$\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1$$

ovvero in un sistema isolato la quantità di moto si conserva. Si consideri ad esempio un sistema costituito da due carrellini di massa m_1 e m_2 tenuti insieme da una molla in tensione



Quando la molla viene lasciata libera, i due carrellini sono spinti in direzioni opposte. Poiché però all'inizio era $q_{1_i} + q_{2_i} = 0$, anche dopo dovrà essere $q_{1_f} + q_{2_f} = 0$, ovvero

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

quindi i due carrellini si muoveranno in direzioni opposte con velocità inversamente proporzionali alle masse.

Per conoscere i valori di v_1 e v_2 tuttavia non è sufficiente la conservazione della quantità di moto: serve una seconda equazione, derivata da considerazioni energetiche, come si vedrà nel prossimo Capitolo.