Capitolo IV

Lavoro e energia

§ 4.1 Lavoro

Si consideri una forza $\mathbf{F}$ costante che agisce per un tratto $\mathbf{s}$ rettilineo e parallelo ad essa: si definisce *lavoro della forza* F *lungo* s il prodotto scalare

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs$$

Se la forza è costante ma non parallela allo spostamento, si avrà

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs \cos \vartheta$$

essendo ϑ l'angolo tra la direzione della forza e la direzione dello spostamento. Più in generale, se la forza non è costante, oppure se lo spostamento non è rettilineo, si consideri un tratto infinitesimo $\mathrm{d}\mathbf{s}$ lungo il quale la forza $\mathbf{F}$ si possa considerare costante; si definisce *lavoro elementare* il prodotto scalare

$$\mathrm{d}L = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

e *lavoro totale* l'integrale lungo il cammino del lavoro elementare

$$L = \int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Si noti che qui $\mathrm{d}L$ indica solo un lavoro infinitesimo e *non* il differenziale di una funzione; per questo molti preferiscono indicarlo come δL .

In generale il valore di questo integrale, e quindi il lavoro totale, dipende dalla forma del cammino, cioè dal percorso seguito per spostarsi dal punto di partenza al punto di arrivo.

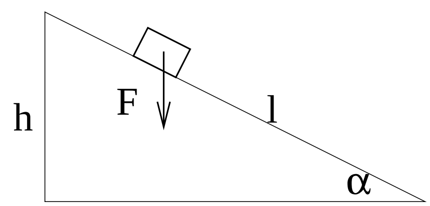
Se l'integrale L è positivo si dice che la forza compie un *lavoro motore* sul corpo sulla quale agisce, se è negativo si dice che compie un *lavoro resistente* o anche che il corpo compie lavoro *contro* la forza $\mathbf{F}$.

Nel SI l'unità di misura del lavoro è il *joule*, che è il lavoro compiuto da una forza di 1 newton che sposta il suo punto di applicazione di 1 metro: $1J = 1N \times 1m$.

Come esempio si consideri la forza gravitazionale: se un peso di massa m cade sotto l'azione della forza peso per un tratto h, il lavoro compiuto dalla forza peso è pari a

$$L = \int_0^h \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{h} = \int_0^h mg\mathrm{d}h = mgh$$

Se invece la massa m cade lungo un piano inclinato lungo l e alto h



si ha

$$L = \int_0^l \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^l F \sin\alpha \ \mathrm{d}l$$

infatti $F \sin\alpha$ è la proiezione di $\mathbf{F}$ su l; quindi

$$L = Fl \sin\alpha = mgl \sin\alpha = mgh$$

si è così ottenuto lo stesso risultato della caduta verticale.

§ 4.2 Potenza

Se un certo lavoro L viene compiuto in un tempo Δt si definisce *potenza media* il rapporto

$$W_m = \frac{L}{\Delta t}$$

Se poi si considera il lavoro infinitesimo dL compiuto nel tempuscolo infinitesimo dt, si ha la *potenza istantanea* come rapporto

$$W_i = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

Nel SI la potenza si misura in *watt*: 1 watt è la potenza fornita da una forza in grado di compiere il lavoro di 1 joule in 1 secondo, $1W = 1J/1s$.

§ 4.3 Energia cinetica

Si consideri il lavoro compiuto da una forza $\mathbf{F}$ su un corpo di massa costante m

$$L = \int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

ora $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$; per altro $\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{v}\mathrm{d}t$, quindi

$$L = \int m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v}\mathrm{d}t = \int m\mathrm{d}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

giacché $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\mathbf{v}$. Ora però se si calcola il differenziale di $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ si ha

$$\mathrm{d}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathrm{d}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{v}$$

essendo il prodotto scalare commutativo; ma si ha pure

$$\mathrm{d}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathrm{d}(v^2) = 2v\mathrm{d}v$$

dove v è il modulo di $\mathbf{v}$. Pertanto

$$L = \int m\mathrm{d}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \int mv\mathrm{d}v$$

Se v_1 è la velocità del corpo nel punto iniziale (dove cioè comincia il cammino di integrazione) e v_2 è la velocità nel punto finale (dove finisce il cammino di integrazione), allora

$$L = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

La quantità $K = \frac{1}{2}mv^2$ prende nome di *energia cinetica*. Il calcolo appena svolto mostra che il lavoro compiuto da una forza su un corpo di massa m è pari alla variazione della sua energia cinetica: è questo il *teorema dell'energia cinetica* (o *teorema delle forze vive*, giacché la quantità $1/2\ mv^2$ era un tempo detta forza viva del corpo, nome oramai caduto in disuso).

Questa relazione è molto importatnte in quanto consente di legare il lavoro di una forza, che può essere complicato da calcolare, ai soli stati iniziale e finale del sistema: conoscendo la velocità prima e dopo è possibile determinare il lavoro compiuto dalla forza.

Se la forza compie un lavoro motore, L è positivo e quindi il corpo aumenta la propria velocità; viceversa se il lavoro è resistente, L è negativo e il corpo rallenta. Questa osservazione fornisce una interpretazione molto importante del concetto di energia: essa può essere vista come la capacità di compiere un lavoro. Se una forza agisce su un corpo di massa m portandolo da fermo ad una velocità v, sul corpo è stato compiuto un lavoro L da parte della forza, e il corpo risulta possedere una energia cinetica $K = {}^1\!/_2\, mv^2$. Il corpo ha così immagazzinato la capacità di compiere un lavoro: infatti se successivamente il corpo compie un lavoro contro un'altra forza fino a fermarsi, ha speso questa energia compiendo un lavoro L pari alla sua energia cinetica. Se invece di fermarsi, passa da una velocità v ad una $v' < v$, ha speso solo parte della sua energia, e la restante parte resta accumulata e pronta a compiere nuovo lavoro. Allo stesso modo se una forza compie un lavoro su un corpo aumentandone la velocità, aumenta anche l'energia accumulata nel corpo, che quindi può compiere un lavoro maggiore.

Come esempio, si consideri un grave che cade in caduta libera verticale di un tratto h partendo da fermo: allora il lavoro compiuto dalla forza peso è

$$L = \int_0^h m\mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^h mg\mathrm{d}s = mgh$$

la velocità iniziale è $v_1 = 0$, e la velocità finale è $v_2 = \sqrt{2gh}$, quindi

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(2gh) = mgh$$

cioè la variazione di energia cinetica è pari al lavoro della forza peso.

§ 4.4 Potenziale

Come si è detto, in generale il lavoro compiuto da una forza dipende dal cammino lungo cui ci si muove dal punto iniziale al punto finale. Ci sono però dei casi in cui il lavoro in realtà dipende solo dalla posizione iniziale e dalla posizione finale e non dal modo in cui ci si sposta da una all'altra posizione. Una forza il cui lavoro non dipende mai dal percorso ma solo dai punti iniziale e finale si dice *conservativa.* Matematicamente questo implica l'esistenza di una funzione U tale che

$$L = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = U(B) - U(A)$$

ovvero il lavoro è pari alla variazione di questa funzione fra i punti iniziale e finale. Si dice anche che il lavoro (infinitesimo) è un differenziale esatto

$$L = \int_A^B \mathrm{d}U$$

Spesso però si preferisce avere il lavoro espresso come differenza fra il valore di una data funzione nel punto iniziale e il valore di tale funzione nel punto finale

$$L = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = V(A) - V(B)$$

Evidentemente basta porre $V = -U$: tale funzione prende il nome di *energia potenziale* della forza conservativa $\mathbf{F}$. L'energia potenziale in un punto A è data quindi da

$$V(A) = V(O) - \int_O^A \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Si noti come l'energia potenziale (come per altro anche la funzione U) dipende sempre da una costante arbitraria: infatti attraverso l'integrale L si possono conoscere solo le variazioni dell'energia potenziale, non il suo valore assoluto. D'altra parte poiché l'integrale non dipende dal percorso la costante $V(O)$ è sempre la stessa, e quindi può essere fissata una volta per tutte, e di solito si sceglie per comodità un valore nullo, $V(O) = 0$: con tale scelta allora

$$V(A) = -\int_0^A \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Ora il lavoro di una forza tra i punti A e B vale

$$L = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_f - K_i$$

ma se la forza è conservativa si ha anche

$$L = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = V(A) - V(B) = V_i - V_f$$

quindi

$$K_f - K_i = V_i - V_f$$

e pertanto

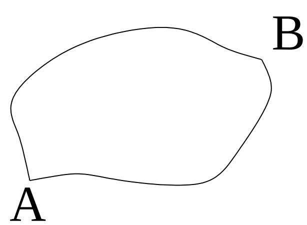
$$K_i + V_i = K_f + V_f$$

ovvero la somma delle energie cinetica e potenziale si mantiene costante. La quantità

$$E = K + V$$

prende nome di *energia meccanica* : pertanto se la forza è conservativa l'energia meccanica si conserva. Se la forza compie lavoro, l'energia cinetica aumenta a spese dell'energia potenziale, e viceversa se il corpo compie lavoro contro la forza. Questa legge di conservazione è di somma importanza, sia teorica che pratica, e consente la risoluzione di molti problemi.

Se la forza in questione è conservativa, si ha un'altra importante conseguenza: dati due cammini che hanno i punti di inizio e fine in comune, il lavoro lungo il cammino 1 è uguale al lavoro lungo il cammino 2



$$\int_{A\ (1)}^{B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_{A\ (2)}^{B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

e quindi

$$\int_{A\ (1)}^{B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} - \int_{A\ (2)}^{B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0$$

Ma l'integrale da A a B lungo il cammino 2 è uguale all'integrale cambiato di segno da B ad A sempre lungo il cammino 2

$$\int_{A\ (2)}^{B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = -\int_{B\ (2)}^{A} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

Pertanto rimane

$$\int_{A\ (1)}^{B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} + \int_{B\ (2)}^{A} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0$$

ma questo non è nient'altro che l'integrale calcolato lungo il cammino chiuso identificato dai due percorsi 1 e 2: se ne deduce pertanto che se la forza è conservativa, il lavoro lungo un qualsiasi cammino chiuso è nullo

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0$$

4.4.1 Lavoro della forza peso

Come esempio si consideri il lavoro di una forza costante quale la forza peso. Si fissi un sistema di riferimento avente l'asse Y verticale e diretto verso l'alto. Si lasci cadere verticalmente una massa da una altezza y_1; quando arriva ad un'altezza $y_2 < y_1$ il lavoro della forza peso sarà

$$L = \int_{y_1}^{y_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{y_1}^{y_2} F\mathrm{d}s = \int_{y_1}^{y_2} mg\mathrm{d}s = -\int_{y_1}^{y_2} mg\mathrm{d}y = mg(y_1 - y_2) = mgh$$

con $h = y_1 - y_2$, e considerando che $\mathbf{F}$ e $\mathrm{d}\mathbf{s}$ sono paralleli e $ds = -dy$ per come è stato orientato l'asse Y.

L'energia potenziale è data da

$$V(y) = V(y_0) - \int_{y_0}^{y} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = V(y_0) - mg(y_0 - y)$$

Per fissare la costante si suole porre a 0 l'energia potenziale alla quota $y = 0$: allora deve essere

$$V(0) = 0 = V(y_0) - mgy_0$$

da cui $V(y_0) = mgy_0$, e quindi

$$V(y) = mgy$$

Il moto è rettilineo uniformemente accelerato, e la velocità che la massa assume dopo un tratto h è $v = \sqrt{2gh}$: pertanto la sua energia cinetica è

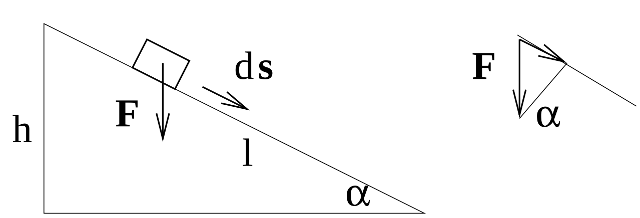
$$K_{y_1} = 0 \qquad , \qquad K_{y_2} = \frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

e quindi $\Delta K = \Delta V$, e anche

$$K_i + V_i = 0 + mgy_1 = mgh + mgy_2 = K_f + V_f$$

mentre la massa cade parte della sua energia potenziale si converte in energia cinetica.

Invece che in verticale, si lasci cadere la massa lungo un piano inclinato formante un angolo α con l'orizzontale



In questo caso il lavoro compiuto dalla forza peso lungo tutto il piano inclinato vale

$$L = \int_0^l \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^l F \mathrm{d}s \ \cos(90 - \alpha) = \int_0^l F \mathrm{d}s \ \sin\alpha = mgl \sin\alpha = mgh$$

essendo $F \sin\alpha$ la proiezione della forza lungo lo spostamento, come è immediato verificare da semplici considerazioni trigonometriche. Si noti che il lavoro lungo il piano inclinato è uguale al lavoro lungo la verticale: infatti la forza peso, come tutte le forze costanti, è conservativa e quindi il lavoro non dipende dal percorso ma solo dalle quote iniziale e finale. L'accelerazione in questo caso è $g \sin\alpha$, e quindi la velocità finale è $v = \sqrt{2g \sin\alpha \ l}$, da cui

$$K_f = \frac{1}{2} m v^2 = mgl \sin\alpha = mgh$$

In maniera analoga al caso precedente si ricava la conservazione dell'energia.

Se poi il grave viene lanciato verticalmente verso l'alto dalla quota $y_i = 0$ con velocità v_i, ad ogni istante della sua salita si ha

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgy = \frac{1}{2} m v_i^2 + 0$$

e poiché $y > 0$ deve essere $v < v_i$: il corpo rallenta mentre sale verso l'alto. Ad un certo punto dovrà allora fermarsi: ciò avviene quando

$$mgy_{max} = \frac{1}{2} m v_i^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y_{max} = \frac{v_i^2}{2g}$$

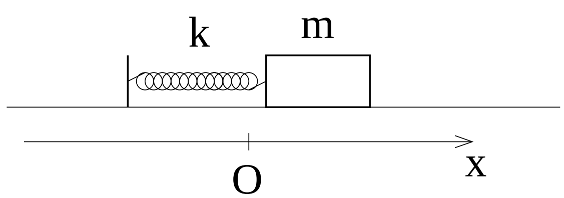
Il corpo non può salire più in alto: infatti se $y > y_{max}$ si avrebbe $\frac{1}{2} m v^2 + mgy > \frac{1}{2} m v_i^2$ e quindi $\frac{1}{2} m v^2 < 0$ il che è ovviamente assurdo. Quindi mentre il corpo sale aumenta la sua energia potenziale a spese della sua energia cinetica, finché questa si esaurisce. A questo punto il corpo inizia a scendere ritrasformando l'energia potenziale in energia cinetica. Quando ripassa per il punto $y = 0$ la sua velocità è tale che

$$\frac{1}{2} m v^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_i^2$$

il che implica $v = v_i$. Si osservi come siano state dedotte da sole considerazioni energetiche tutte le proprietà del moto già a suo tempo determinate da considerazioni cinematiche: queste ultime sono in genere più complesse (ad esempio, avevano richiesto la conoscenza dell'istante in cui il corpo si arresta o ripassa per l'origine), mentre le considerazioni energetiche sono spesso più semplici e immediate.

4.4.2 Potenziale elastico

Come secondo esempio si consideri la forza elastica $F = -kx$: è possibile dimostrare matematicamente che anche una forza di questo tipo è conservativa e quindi ammette potenziale. Si fissi un sistema di riferimento avente l'asse X nella direzione del sistema massa–molla e con l'origine nella posizione di riposo della massa



Quando la massa si sposta dalla posizione x_1 alla posizione x_2 il lavoro della forza elastica è dato da

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{x_1}^{x_2} F \mathrm{d}s = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

considerando che $\mathbf{F}$ e d$\mathbf{s}$ sono paralleli. Questo lavoro è positivo se $x_1 > x_2$, cioè se la molla si porta verso la posizione di equilibrio, ed è negativo se $x_1 < x_2$: nel primo caso è infatti la molla che compie lavoro, mentre nel secondo si compie lavoro contro la forza elastica per allungare ulteriormente la molla.

La forza elastica ammette potenziale perché il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziale e finale della massa, ovvero dall'allungamento della molla, e non da come avviene lo spostamento. L'energia potenziale è data da

$$V(x) = V(x_0) - \int_{x_0}^{x} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = V(x_0) + \frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2)$$

Per fissare la costante si suole porre a 0 l'energia potenziale nella posizione $x = 0$: allora deve essere

$$V(0) = 0 = V(x_0) - \frac{1}{2}kx_0^2$$

da cui $V(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2$, e quindi

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Il moto è oscillatorio armonico; se la massa viene spostata nella posizione x_{max} e poi lasciata libera, ad ogni istante l'energia meccanica varrà

$$E = K + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

in particolare ogni volta che la massa arriva nella posizione di massimo allungamento essa vale

$$E = 0 + \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

mentre nella posizione intermedia $x = 0$, dove la velocità è massima,

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + 0$$

si può così determinare il modulo della velocità massima

$$|v_{max}| = \sqrt{\frac{k}{m}}|x_{max}|$$

4.4.3 Conservazione dell'energia totale

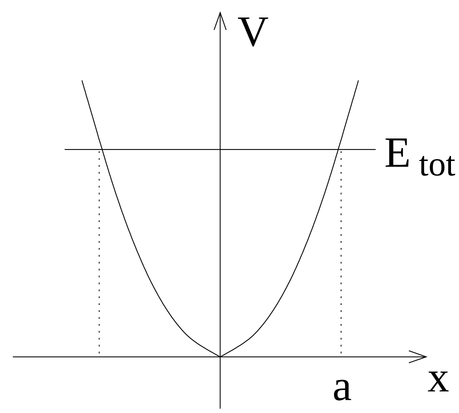
Si è dimostrato che l'energia meccanica si conserva: questa è infatti una legge. Tuttavia oltre all'energia meccanica ci sono altre forme di energia, termica, elettrica, nucleare, eccetera, come si vedrà meglio in seguito. Ci sono situazioni in cui l'energia meccanica non si conserva; ma se ad essa si sommano gli altri tipi di energia si osserva come questa quantità, che prende nome di *energia totale* rimane conservata. Si può allora enunciare il *principio di conservazione dell'energia totale*, secondo cui la somma di tutti i tipi di energia si conserva in qualsiasi caso. Esso è un principio, in quanto non è sempre possibile tener conto di tutti i possibili contributi; né si può escludere che esista una qualche forma di energia non ancora nota che non rispetta questa conservazione. Ciononostante finora in tutti gli esperimenti effettuati si è sempre verificata tale conservazione: essa quindi viene assunta come principio, valido finché non si sia dimostrata, direttamente o indirettamente, la sua non validità. Quale esempio si consideri che l'esistenza del neutrino è stata supposta dai fisici sulla sola base della conservazione dell'energia in reazioni nucleari che apparentemente sembravano violarla.

Le leggi di conservazione, come quelle dell'energia meccanica e della quantità di moto, sono dette anche *integrali primi del moto*: esse infatti aiutano nella risoluzione delle equazioni del moto. Per esempio, l'energia cinetica contiene la velocità, e quindi sotto certe condizioni può essere possibile ricavarne un'espressione dalla conservazione dell'energia senza risolvere esplicitamente le equazioni del moto: quindi in un certo senso si "salta" una integrazione.

4.4.4 Studio dei grafici del potenziale

Dalla forma dei grafici del potenziale è possibile ricavare utili informazioni sul tipo di moto, anche senza risolverne le equazioni. Si consideri come esempio il potenziale della forza elastica, che è rappresentato dalla parabola

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



Se E_{tot} è l'energia meccanica totale della massa in oscillazione, dalla sola osservazione del grafico si evince che il moto è limitato tra le posizioni $x = -a$ e $x = +a$: infatti al di fuori di esse l'energia potenziale è maggiore dell'energia totale, il che implicherebbe una energia cinetica negativa. Il valore di a è dato da

$$E_{tot} = \frac{1}{2}ka^2 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \pm\sqrt{\frac{2E_{tot}}{k}}$$

Quando il corpo si trova alla sua massima distanza dalla posizione centrale, è fermo e possiede solo energia potenziale; quindi comincia a muoversi verso il centro guadagnando energia cinetica a spese della sua energia potenziale. Giunto nella posizione di mezzo $x = 0$ raggiunge la sua massima velocità, in modulo pari a

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{tot}}{m}}$$

Da qui prosegue il moto rallentando, perdendo cioè energia cinetica per guadagnare energia potenziale, fino a fermarsi nella posizione di massimo allontanamento. Dopodiché il moto riprende in senso inverso. Si tratta quindi di un moto oscillatorio intorno alla posizione di equilibrio.

Si noti quante informazioni, qualitative e quantitative, siano state estratte dalla sola osservazione della forma del potenziale e dalla conoscenza dell'energia totale senza risolvere le equazioni del moto. In casi più complessi questo tipo di analisi è molto utile.

§ 4.5 Attrito

Finora sono stati visti esempi di forze conservative. Un esempio molto importante di forze non conservative è rappresentato dalle forze di attrito. Si tratta di forze che si oppongono al moto e sono causate dallo sfregamento di due superfici (in senso lato) che scorrono una sull'altra.

Una forma di attrito è quella che si presenta quando le superfici di due solidi sono poste a contatto. Per quanto sia liscia infatti la superficie di un solido presenta microscopiche asperità; queste asperità si incuneano le une nelle altre impedendo uno scivolamento agevole tra le due superfici.

Nel moto fra due solidi a contatto si distingue un *attrito statico* ed un *attrito dinamico*. Il primo si manifesta quando un corpo appoggiato su una superficie inizia a muoversi: esso si oppone infatti all'iniziare del moto. Teoricamente dovrebbe bastare una piccolissima forza per mettere in moto un corpo; ma è esperienza comune che per muovere un corpo fermo occorre applicargli una certa forza e che forze di minore intensità non sono sufficienti. La forza di attrito statico è proporzionale al peso del corpo ma non alla superficie di contatto

$$\mathbf{F}_s = k_s m g \mathbf{n}$$

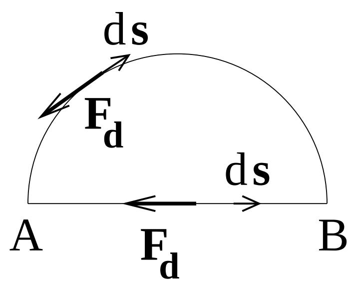
dove $\mathbf{n}$ è un versore parallelo alla superficie e k_s è il cosiddetto *coefficiente di attrito statico*. Per misurarlo si può utilizzare un piano inclinato il cui angolo di inclinazione può essere variato a piacere: si parte dal piano in posizione orizzontale e se ne aumenta l'inclinazione; nell'istante in cui il corpo inizia a muoversi, la componente della forza peso $F \sin\alpha$ è pari alla forza di attrito statico. Noto il peso del corpo si ricava il coefficiente di attrito statico. In alternativa può essere usato un dinamometro, misurando direttamente la forza necessaria per compensare l'attrito statico. Il coefficiente k_s dipende dai corpi in contatto e dalla condizione delle superfici.

Una volta che il corpo è in moto, su di esso agisce una forza di attrito dinamico. Anch'essa è proporzionale al peso del corpo ma non alla superficie di contatto

$$\mathbf{F}_d = k_d mg\mathbf{n}$$

dove $\mathbf{n}$ è un versore parallelo alla superficie e k_d è il cosiddetto *coefficiente di attrito dinamico*. E' sempre $k_s > k_d$: è facile verificare infatti che una volta messo in moto un corpo, per mantenerlo in movimento occorre applicargli una forza minore di quella che era stata necessaria per iniziare il moto. Per misurare k_d si può usare lo stesso piano inclinato oppure lo stesso dinamometro, misurando la forza necessaria a mantenere il corpo in moto rettilineo uniforme.

L'attrito è un esempio di forza dissipativa: essa si oppone sempre al moto tendendo a diminuire l'energia cinetica. Questo tipo di forze non ammette potenziale. Per verificarlo si calcoli il lavoro della forza di attrito (dinamico) lungo due cammini diversi, una retta ed una semicirconferenza, da uno stesso punto A ad uno stesso punto B distanti l



Il lavoro della forza di attrito lungo il cammino rettilineo è dato da

$$L_1 = \int_A^B \mathbf{F}_d \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_A^B -k_d mg \mathrm{d}l = -k_d mg\ l$$

tenendo presente che $\mathbf{F}_d$ e d$\mathbf{s}$ sono sempre paralleli e diretti in verso opposto, quindi $\vartheta = 180$ e $\cos\vartheta = -1$; inoltre $\int_A^B \mathrm{d}l = l$. Il lavoro della forza di attrito lungo la semicirconferenza è invece dato da

$$L_2 = \int_A^B \mathbf{F}_d \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_A^B -k_d mg \mathrm{d}l = -k_d mg\ \frac{\pi}{2} l$$

tenendo presente che $\mathbf{F}_d$ e d$\mathbf{s}$ sono sempre paralleli e diretti in verso opposto, quindi $\vartheta = 180$ e $\cos\vartheta = -1$; inoltre $\int_A^B \mathrm{d}l = \pi l/2$, cioè la lunghezza della semicirconferenza. E' evidente che $L_1 \neq L_2$: pertanto il lavoro della forza di attrito dipende dal cammino di integrazione, e quindi la forza di attrito non può essere una forza conservativa. Una dimostrazione alternativa, ma del tutto equivalente, consiste nel dimostrare che il lavoro della forza di attrito lungo un cammino chiuso non è nullo.

§ 4.6 Urti elastici

Si consideri nuovamente l'esempio, esaminato alla fine del precedente Capitolo, dei due carrellini tenuti insieme da una molla. Si è visto come la conservazione della quantità di moto imponga che le due velocità siano opposte e inversamente proporzionali alle masse

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

Questa relazione da sola non è però sufficiente a determinare i valori delle velocità. Occorre aggiungere la conservazione dell'energia: inzialmente le due masse sono ferme e la molla è contratta di un tratto x; successivamente le masse hanno velocità v_1 e v_2 e la molla è libera. La conservazione dell'energia meccanica impone quindi che si abbia

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Queste due equazioni devono essere soddisfatte contemporaneamente: quindi la soluzione del sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}kx^2 = 0 \end{cases}$$

permette di determinare i valori delle velocità.

Si abbia un corpo puntiforme di massa m_1 e velocità v_0 che va ad urtare una seconda massa puntiforme m_2 inizialmente ferma

Siano v_1 e v_2 le velocità finali delle due masse. Dovendosi conservare la quantità di moto e l'energia totale (che in questo caso è solamente energia cinetica, giacché il moto avviene su un piano orizzontale), si hanno le due equazioni

$$\begin{cases} m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

E' sufficiente esplicitare v_2 dalla prima equazione e sostituirla nella seconda per ottenere

$$v_1 = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

La soluzione col segno + non è fisicamente accettabile, perché vorrebbe dire $v_1 = v_0$ e di conseguenza $v_2 = 0$, cioè come se l'urto non fosse avvenuto. Si ha quindi

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

e quindi

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

In particolare se $m_1 = m_2$ la prima massa si arresta e la seconda riparte con la stessa velocità. Se invece $m_2 \to \infty$, allora è $v_1 = -v_0$ e $v_2 = 0$: la seconda massa rimane ferma mentre la prima rimbalza sulla seconda e torna indietro con la stessa velocità (in modulo).

Queste equazioni si possono generalizzare al caso in cui anche m_2 sia inizialmente in moto con velocità v_0' : in questo caso si ha

$$\begin{cases} m_1 v_0 + m_2 v_0' = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_0'}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

Se le masse non sono puntiformi, occorre considerare anche le loro dimensioni. Se le velocità iniziali delle due masse giacciono sulla congiungente dei loro baricentri, si parla di *urto centrale*: in questo caso si possono applicare le stesse considerazioni delle masse puntiformi. Altrimenti si parla di *urto periferico*: si deve allora tener presente il carattere vettoriale della quantità di moto, ed eguagliare sia le componenti longitudinali che le componenti trasverse