Capitolo VI

Interazione gravitazionale

§ 6.1 Leggi di Keplero

L'idea che la Terra non fosse al centro dell'Universo era già affiorata presso alcuni astronomi dell'antica Grecia. Ma l'affermarsi delle concezioni aristotelica e tolemaica portò a ritenere che la Terra fosse indubitabilmente al centro dell'Universo, nonostante questa teoria avesse delle difficoltà a dare spiegazione di alcuni importanti fenomeni celesti (come il moto retrogrado dei pianeti in alcuni periodi dell'anno).

La concezione eliocentrica non fu però del tutto abbandonata, venendo ripresa tra l'altro da Copernico che ne ipotizzò la validità (ancorché come puro modello descrittivo) nella sua maggiore opera (pubblicata postuma per prudenza).

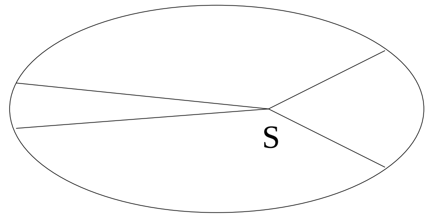
L'osservazione del Cielo e la determinazione della posizione delle stelle fu portata avanti per molti secoli. Uno dei più grandi osservatori e misuratori fu senza dubbio Tycho Brahe, che ad occhio nudo (il telescopio sarebbe stato inventato più di un secolo dopo) misurò con estrema precisione la posizione e lo spostamento dei cinque pianeti allora conosciuti, Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno.

Questa enorme e preziosissima mole di dati passò al suo allievo, Keplero, che la analizzò a fondo. Egli si accorse che questi dati trovavano una semplice ed efficace spiegazione se si ipotizzava che fosse la Terra a ruotare intorno al Sole e non viceversa. Il risultato di questo lungo lavoro di analisi fu la formulazione di tre leggi (dette appunto *leggi di Keplero*) di natura sperimentale. Esse affermano che

1) ogni pianeta compie un'orbita ellittica nella quale il Sole occupa uno dei due fuochi (in realtà le orbite sono molto poco ellittiche, e per molti scopi pratici possono essere

considerate circolari)

2) il raggio vettore che congiunge il pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali



(come conseguenza il pianeta si muove più velocemente quando è più vicino al Sole e più lentamente quando è più lontano)

3) il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione T e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita a è lo stesso per tutti i pianeti

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cost}$$

§ 6.2 Legge di Newton

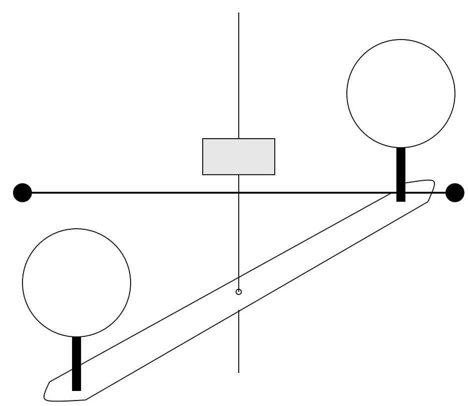
Keplero non fu in grado di spiegare perché i pianeti del Sistema solare seguissero le leggi da lui formulate. Il problema fu ripreso da Newton, il quale pervenne alla legge che porta il suo nome. Egli però andò oltre, giacché ritenne che la forza che attrae fra loro due corpi celesti è la stessa che attira la Terra e la Luna, che trattiene i corpi sulla Terra, e che si esercita in generale fra due corpi materiali.

Date due masse puntiformi (ovvero le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alla loro distanza), la legge di Newton, o *legge di gravitazione universale*, afferma che essi si attraggono con una forza che ha per direzione la congiungente i due corpi e verso attrattivo; il modulo di tale forza è proporzionale alle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Caratteristica di questa forza è di essere solo attrattiva. Essa dipende da una proprietà di ciascun corpo che è detta *massa gravitazionale*. In linea di principio essa potrebbe essere diversa dalla massa inerziale, che si rivela quando una forza applicata ad un corpo ne provoca una accelerazione. Già Newton si pose il problema, e condusse degli esperimenti per cercare di rivelare una differenza fra le due, senza riuscirvi. Esperimenti di questo genere sono stati ripetuti più volte nella storia, dando sempre come risultato che il rapporto massa inerziale–massa gravitazionale è lo stesso per tutti i corpi, il che è come dire che sono la stessa cosa, giacché la costante di proporzionalità può essere riassorbita nelle unità di misura. Pertanto si può parlare di massa di un corpo senza ambiguità.

La costante G esprime la proporzionalità fra la forza, le masse e la distanza, ed è detta *costante di gravitazione universale*. Essa vale $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$, un valore molto piccolo: infatti la forza di gravità è la più debole delle forze conosciute. Per misurare forze così piccole occorre uno strumento molto sensibile, la *bilancia di Cavendish*



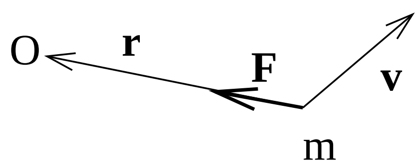
Si tratta di due piccole sfere di piombo fissate ad un manubrio in grado di oscillare, che sono attratte da due sfere di piombo più grandi. Misurando il periodo di oscillazione si può risalire alla forza di attrazione e da questa, essendo note le masse, alla costante G.

Se invece di due masse se ne hanno n, la forza di attrazione gravitazionale può essere calcolata mediante il *principio di sovrapposizione*: la forza risultante su una massa è la somma (vettoriale ovviamente) delle forze generate da ciascuna massa presa separatamente.

La legge di Newton come espressa vale in realtà per masse puntiformi. Se le masse non sono puntiformi, è sufficiente scomporle in porzioni infinitesime, che possono pertanto essere considerate puntiformi. Si calcola quindi la forza di attrazione infinitesima fra ogni coppia di porzioni e si integra su entrambe le masse: in questo modo è possibile ricavare (almeno in linea di principio, dato che il calcolo esplicito potrebbe essere assai complesso) la forza di attrazione fra due corpi di forma ed estensione qualsiasi.

6.2.1 Deduzione della legge di Newton

L'assunto fondamentale di Newton è che la forza di attrazione gravitazionale sia una *forza centrale*, cioè una forza diretta sempre verso un punto determinato, il Sole nel caso del Sistema solare o in generale il corpo che esercita la forza. E' possibile dimostrare che il moto generato da una forza centrale giace su un piano: infatti si consideri un corpo in moto sotto l'azione di una forza centrale, che quindi ha direzione sempre rivolta verso un punto fisso



I vettori posizione $\mathbf{r}$ e velocità $\mathbf{v}$ identificano un piano ad un certo istante. In questo istante il momento della quantità di moto è dato da $\bar{\tau} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{r}$, e la sua derivata, come si è visto nel Capitolo precedente, vale

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M} = \mathbf{F} \wedge \mathbf{r}$$

ovvero è pari al momento della forza. Ma questo momento è nullo, giacché $\mathbf{F}$ e $\mathbf{r}$ sono paralleli. Quindi il momento della quantità di moto è costante nel tempo. Ora ad ogni istante questo momento è perpendicolare al piano identificato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}$: se il punto uscisse da tale piano, il momento della quantità di moto sarebbe ortogonale al nuovo piano identificato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}$ e non più al precedente, ma ciò è impossibile, perché $\bar{\tau}$ è costante. Quindi il moto deve svolgersi sempre nello stesso piano.

Mediante calcoli più complicati si può dimostrare che il moto di un punto materiale sottoposto ad una forza centrale è sempre rappresentato da una conica; per valori particolari dell'energia il moto è una ellisse (o come caso particolare una circonferenza) con uno dei fuochi coincidente con la sorgente della forza. Quindi l'aver supposto la forza di tipo centrale spiega la prima legge di Keplero (e con opportuni calcoli anche la seconda).

Newton poi utilizzò la terza legge di Keplero per determinare il modulo della forza. Per semplicità si supponga che il moto sia circolare; allora la forza centripeta è pari a

$$F = ma_c = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

dove T è il periodo di rivoluzione del corpo. Ora la terza legge di Keplero può essere riscritta come $T^2 = Kr^3$ (il semiasse diventa il raggio della circonferenza), e sostituendo si ottiene

$$F = \left(\frac{4\pi^2}{K}\right)\frac{m}{r^2} = k\frac{m}{r^2}$$

quindi si trova una dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza. Si può poi mostrare che la costante k (ovvero K) dipende dalla massa del Sole, ottenendo così la forma esplicita della legge di Newton.

6.2.2 *Gravità terrestre*

La forza con cui la Terra attira un corpo di massa m è data da

$$F_T = G\frac{mM_T}{R_T^2}$$

giacché la distanza fra i due corpi è praticamente sempre uguale al raggio terrestre R_T. Però la forza peso cui la massa è sottoposta vale

$$F_P = mg$$

Essendo ovviamente uguali le due forze, si ricava

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

espressione che lega l'accelerazione di gravità alla massa e al raggio della Terra. Essa permette di ricavare la massa della Terra una volta che ne sia noto il raggio

$$M_T = \frac{g}{G}R_T^2$$

§ 6.3 Campo e potenziale gravitazionale

La forza che si esercita fra due masse puntiformi dipende dalla loro distanza e dall'entità delle masse. E' conveniente isolare il contributo della sorgente del campo dalla massa che ne sente l'influenza. Si definisce così il *campo gravitazionale*, che è dato dalla forza per unità di massa

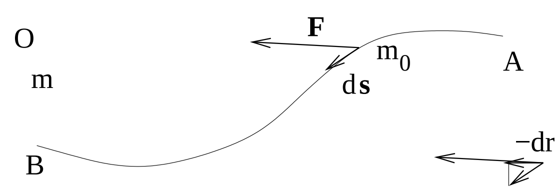
$$\mathbf{G}_g = \frac{\mathbf{F}}{m_2}$$

anch'esso è un vettore sempre diretto verso la sorgente, il cui modulo vale

$$G_g = G\frac{m_1}{r^2}$$

Pertanto in ogni punto dello spazio risulta definito un vettore che esprime l'intensità del campo prodotto dalla massa m_1 (anche se fisicamente tale intensità può essere misurata solo ponendo nel campo una seconda massa, detta per questo massa sonda, e osservando la forza esercitata su di essa).

E' possibile dimostrare che una forza centrale è conservativa: quindi pure la forza gravitazionale è conservativa e ammette potenziale. Per ricavarne un'espressione è sufficiente calcolare il lavoro della forza gravitazionale per spostare una massa m_0 nel campo generato da una massa m da un punto A a distanza r_0 ad un punto B a distanza r



si ha allora

$$V(B) = V(A) - \int_A^B \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

ma il prodotto scalare $\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$ è dato dalla proiezione di $\mathrm{d}\mathbf{s}$ su $\mathbf{F}$, e tale proiezione è diretta quindi lungo $\mathbf{r}$ ed è pari a $-\mathrm{d}r$ (per come è orientato $\mathbf{r}$): allora

$$V(B) = V(A) - \int_A^B \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = V(A) + \int_A^B F\mathrm{d}r = V(A) + \int_{r_0}^{r} G\frac{mm_0}{r^2}\mathrm{d}r$$

pertanto l'energia potenziale dipende solo dalla distanza dalla sorgente

$$V(r) = V(A) + Gmm_0\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

Come già visto, il potenziale dipende da una costante arbitraria, che può essere fissata in modo da semplificare i problemi. Nel caso del campo gravitazionale si suole porre uguale a 0 l'energia potenziale all'infinito

$$V(\infty) = 0 = V(A) + Gmm_0\frac{1}{r_0}$$

da cui $V(A) = -Gmm_0/r_0$, e quindi

$$V(r) = -G\frac{mm_0}{r}$$

Anche in questo caso si può definire una energia potenziale per unità di massa, in modo da separare il contributo della sorgente del campo dalla sonda che ne sente l'effetto; questa funziona viene talvolta indicata come *potenziale del campo gravitazionale*

$$U(r) = \frac{V(r)}{m_0} = -G\frac{m}{r}$$

Tutto questo vale nel caso in cui si abbiano una sola sorgente e una sola sonda ed entrambe puntiformi. Nel caso se ne abbiano più di una occorre sommare su tutte, e se non sono puntiformi vanno scomposte in elementi infinitesimi per poi integrare sulle due masse. Tuttavia questo compito è assai più agevole che non nel caso delle forze: infatti i potenziali e le energie potenziali sono tutti degli scalari, e sommare degli scalari, ovvero dei numeri, è molto più semplice che non sommare dei vettori, dei quali occorre tener conto delle componenti.

6.3.1 Orbite chiuse e orbite aperte

Una massa m che si muove nel campo gravitazionale generato da una massa M possiede un'energia meccanica totale pari a

$$E = K + V = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$$

Come già detto, è possibile dimostrare che la traiettoria seguita dalla massa m è una conica; il tipo di conica è determinato dal valore dell'energia totale.

Se l'energia totale è negativa, $E < 0$, l'orbita è una ellisse o una circonferenza, giacché in questo caso il moto della massa sonda è limitato: infatti se non fosse così, la massa potrebbe allontanarsi all'infinito; ma per $r \to \infty$ si ha $V \to 0$, e quindi resterebbe

$$E = \frac{1}{2}mv^2 < 0$$

dato che l'energia totale si conserva (la forza gravitazionale è conservativa); ma ciò è evidentemente assurdo. Quindi la massa sonda non può allontanarsi all'infinito e il suo moto è limitato. Ma le uniche coniche limitate sono appunto l'ellisse e la circonferenza, che quindi costituiscono l'orbita del corpo. Si noti inoltre che quando la sonda m si avvicina alla sorgente M, r diminuisce e quindi V in valore assoluto aumenta; affinché l'energia totale rimanga costante anche K deve aumentare; viceversa quando il corpo si allontana dalla sorgente, r aumenta, V in valore assoluto diminuisce e quindi anche K deve diminuire. Ne segue che quando il corpo si avvicina la sua velocità aumenta, e quando si allontana diminuisce, il che riporta alla seconda legge di Keplero.

Se invece l'energia totale è positiva o nulla, $E \geq 0$, allora il moto della sonda può essere illimitato, per il ragionamento opposto al caso precedente. Se $E = 0$ il corpo arriva all'infinito con velocità nulla, e la sua orbita è una parabola; se invece $E > 0$ il corpo arriva all'infinito possedendo ancora dell'energia cinetica, e l'orbita è un ramo di iperbole. Dato che parabola e iperbole sono le uniche due coniche aperte, queste sono le sole orbite possibili.

6.3.2 Velocità di fuga

Se si lancia un corpo di massa m verso l'alto, esso giunge ad una certa altezza e poi ricade verso il basso; se si aumenta progressivamente la velocità di lancio esso sale sempre di più. Ci si può chiedere se esista una velocità tale per cui il corpo non ricada più sulla Terra, cioè per la quale il corpo riesca a liberarsi dalla gravità terrestre; essa viene detta *velocità di fuga*. Poiché il corpo allontanandosi rallenta, la richiesta minima è che la sua energia sia tale da farlo arrivare all'infinito con velocità nulla: infatti con meno energia il corpo arriverebbe solo ad una distanza finita e poi tornerebbe indietro, cioè non si libererebbe dal campo terrestre, mentre una energia maggiore sarebbe sprecata. All'infinito $V = 0$, e velocità nulla $v = 0$ implica $E = 0$; ma l'energia si conserva, per cui nulla deve essere anche l'energia totale del corpo sulla superficie terrestre quando se ne distacca, cioè

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{mM_T}{R_T^2} = 0$$

il che permette di determinare la velocità di fuga della Terra

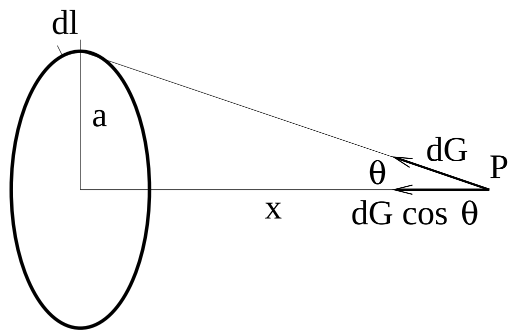
$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T^2}}$$

In maniera analoga si può calcolare la velocità di fuga di un qualsiasi corpo celeste.

§ 6.4 Esempi

6.4.1 Campo di un anello sull'asse

Si abbia un anello di raggio a, spessore infinitesimo e densità lineare uniforme λ; si vuole calcolare il campo gravitazionale e il suo potenziale in un punto P posto sull'asse dell'anello ad una distanza x dal centro



Per simmetria il campo gravitazionale deve essere diretto lungo l'asse: infatti ad ogni elemento infinitesimo dl sull'anello ne corrisponde uno posto simmetricamente e tale per cui le componenti ortogonali all'asse di elidono; viceversa le componenti parallele si sommano.

Ogni elemento dl di massa d$m = \lambda$dl contribuisce al campo totale con un d$\mathbf{G}_g$ pari in modulo a

$$\mathrm{d}G_g = G\frac{\mathrm{d}m}{r^2} = G\frac{\lambda \mathrm{d}l}{a^2 + x^2}$$

la componente di dG_g lungo l'asse vale d$G_g \cos\vartheta$ con

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

da cui

$$G_g = \int \mathrm{d}G_g \cos\vartheta = \int G\frac{\lambda \mathrm{d}l}{(a^2 + x^2)}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = G\frac{\lambda x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\int \mathrm{d}l$$

ma $\int \mathrm{d}l = 2\pi a$ e $\lambda\ 2\pi a = m$, la massa totale dell'anello, per cui

$$G_g = G\frac{mx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Si noti che per $x = 0$ è $G_g(0) = 0$, mentre per $x >> a$ è

$$G_g \simeq G\frac{m}{x^2}$$

cioè a grandi distanze l'anello si comporta come una massa puntiforme (si perde la sua struttura).

Per quanto riguarda il potenziale si ha in maniera analoga che il contributo dell'elemento dl è pari a

$$\mathrm{d}U = -G\frac{\mathrm{d}m}{r} = -G\frac{\lambda \mathrm{d}l}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

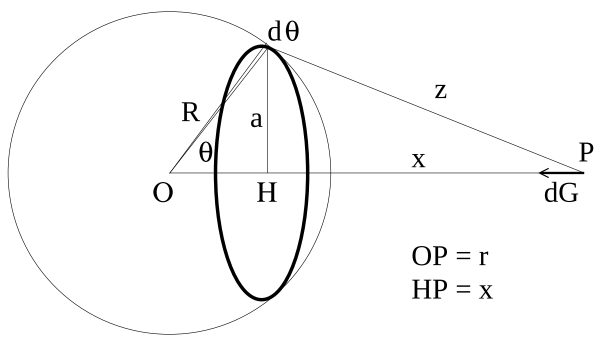
e integrando su tutto l'anello

$$U = -G\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + x^2}}\int \mathrm{d}l = -G\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + x^2}}\ 2\pi a = -G\frac{m}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Si noti come sia molto più semplice calcolare il potenziale invece del campo. Per $x = 0$ è $U = -G\frac{m}{a}$ costante, mentre per $x >> a$ è $U \simeq -G\frac{m}{x}$ come per una massa puntiforme.

6.4.2 Campo di un guscio sferico

Si abbia un guscio sferico di raggio R, spessore infinitesimo e densità superficiale uniforme σ; si vuole calcolare il campo gravitazionale e il suo potenziale in un punto P posto ad una distanza $r > R$ dal centro



Per ragioni di simmetria il campo è diretto lungo la congiungente **OP**. Si consideri un anello infinitesimo ortogonale ad **OP**: il modulo del campo che esso genera è dato da

$$\mathrm{d}G_g = G\frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\ \mathrm{d}m$$

con $\mathrm{d}m = \sigma\ \mathrm{d}S = \sigma\ 2\pi a\ R\ \mathrm{d}\vartheta$ e $a = R\sin\vartheta$; perciò

$$\mathrm{d}G_g = G\frac{\sigma 2\pi a x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}R\ \mathrm{d}\vartheta$$

ma

$$x^2 + a^2 = z^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\vartheta$$

e pertanto il campo totale, ottenuto integrando su ϑ, è dato da

$$G_g = \int_0^\pi G\ 2\pi\sigma\ \frac{R\sin\vartheta(r - R\cos\vartheta)}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\vartheta)^{3/2}} R\ \mathrm{d}\vartheta$$

Posto $-R\cos\vartheta = y$, da cui $\mathrm{d}y = R\sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta$, con $\vartheta = 0 \to y = -R$ e $\vartheta = \pi \to y = R$, rimane

$$G_g = G\ 2\pi\sigma R \int_{-R}^{R} \frac{r + y}{(r^2 + R^2 + 2ry)^{3/2}}\ \mathrm{d}y = 2\pi G\sigma R(r\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)$$

dove

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}y}{(r^2 + R^2 + 2ry)^{3/2}} = \left[\frac{-2}{2r}(r^2 + R^2 + 2ry)^{-1/2}\right]_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r - R} - \frac{1}{r + R}\right) = \frac{2R}{r}\frac{1}{r^2 - R^2}$$

(perché $r > R$) e

$$\mathcal{I}_2 = \int_{-R}^{R} \frac{y\ \mathrm{d}y}{(r^2 + R^2 + 2ry)^{3/2}} = \frac{1}{2r}\int_{-R}^{R} \frac{r^2 + R^2 + 2ry - r^2 - R^2}{(r^2 + R^2 + 2ry)^{3/2}}\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2r}\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}y}{(r^2 + R^2 + 2ry)^{1/2}} - \frac{r^2 + R^2}{2r}\mathcal{I}_1 =$$

$$= \frac{1}{2r}\left[\frac{2}{2r}\sqrt{r^2 + R^2 + 2ry}\right]_{-R}^{R} - \frac{R}{r^2}\frac{r^2 + R^2}{r^2 - R^2} = -\frac{2R^3}{r^2}\frac{1}{r^2 - R^2}$$

Quindi

$$G_g = 2\pi G\sigma R\left(\frac{2R}{r^2 - R^2} - \frac{2R^3}{r^2}\frac{1}{r^2 - R^2}\right) = 4\pi G\sigma\frac{R^2}{r^2} = G\frac{m}{r^2}$$

come se si trattasse di una massa puntiforme concentrata al centro del guscio, giacché per definizione di densità $4\pi R^2\sigma = S\sigma = m$.

Per quanto riguarda il potenziale si ha in maniera analoga che il contributo dell'anello infinitesimo ortogonale ad **OP** è pari a

$$\mathrm{d}U = -G\frac{\mathrm{d}m}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sigma\ 2\pi a\ R\ \mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

dove nuovamente $a = R\sin\vartheta$ e $x^2 + a^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\vartheta$, pertanto

$$\mathrm{d}U = -G\ 2\pi\sigma\ \frac{R\sin\vartheta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\cos\vartheta}}R\mathrm{d}\vartheta$$

Con la solita posizione $-R\cos\vartheta = y$ rimane

$$U = -2\pi G\sigma R\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{r^2+R^2+2ry}} = -2\pi G\sigma\frac{R^2}{r} = -G\frac{m}{r}$$

come per una massa puntiforme.

6.4.3 Massa sferica

Si abbia una sfera piena di raggio R e densità volumica uniforme ρ; si vuole calcolare il campo gravitazionale e il suo potenziale in un punto P posto ad una distanza $r > R$ dal centro.

Preso un guscio sferico di raggio a e spessore da, il suo contributo al campo totale è dato da

$$\mathrm{d}G_g = G\frac{\mathrm{d}m}{r^2} = G\frac{\rho\ 4\pi a^2\mathrm{d}a}{r^2}$$

Integrando fra 0 e R si ottiene immediatamente

$$G_g = \int_0^R G\frac{\rho\ 4\pi a^2\mathrm{d}a}{r^2} = G\frac{\rho\ 4\pi R^3}{3\ r^2} = G\frac{m}{r^2}$$

come se si trattasse di una massa puntiforme concentrata al centro della sfera, giacché per definizione di densità $\frac{4}{3}\pi R^3\rho = V\rho = m$.

Per quanto riguarda il potenziale si ha in maniera analoga che il contributo del guscio infinitesimo è pari a

$$\mathrm{d}U = -G\frac{\mathrm{d}m}{r} = -G\frac{\rho\ 4\pi a^2\mathrm{d}a}{r}$$

e integrando fra 0 e R si ottiene immediatamente

$$U = \int_0^R -G\frac{\rho\ 4\pi a^2\mathrm{d}a}{r} = -G\frac{\rho\ 4\pi R^3}{3\ r} = -G\frac{m}{r}$$

come per una massa puntiforme.