Capitolo VII

Fluidi

L'idrostatica e l'idrodinamica studiano i fluidi. Questi sono corpi la cui forma non si mantiene costante e le cui parti possono scorrere le une sulle altre. Si suole distinguere i fluidi in liquidi e gas: i primi pur non avendo forma costante hanno tuttavia volume costante, i secondi non hanno neppure volume costante. Sia i liquidi che i gas si adattano alla forma dell'oggetto che li contiene; i gas inoltre tendono ad occupare tutto il volume a disposizione. Molte delle considerazioni di questo Capitolo sono valide per entrambi i tipi di fluido; le eventuali eccezioni saranno segnalate.

I fluidi si possono distinguere in *fluidi ideali* e *fluidi reali*: i primi sono privi di attrito interno e sono perfettamente elastici, i secondi manifestano un attrito interno e non sono perfettamente elastici. I liquidi ideali inoltre sono incompressibili e indilatabili, i liquidi reali possono subire dilatazioni e compressioni, pur in condizioni fisiche particolari. In natura come è immaginabile esistono solo fluidi reali; i fluidi ideali sono comunque una buona approssimazione per affrontare molti problemi.

§ 7.1 Pressione

Si consideri un fluido in quiete in un recipiente. Poiché esso preme contro le pareti, esercita su queste una forza. Si consideri una superficie S e la forza F agente su di essa: si definisce *pressione media* il rapporto

$$p_m = \frac{F}{S}$$

Preso un punto qualsiasi della superficie, se $\mathrm{d}S$ è l'elemento infinitesimo di superficie intorno al punto considerato e dF la forza infinitesima agente su tale elemento, si definisce *pressione* (*locale* o *puntuale*) il rapporto

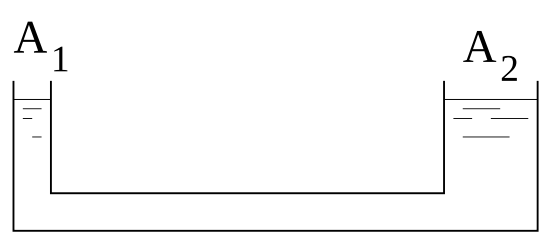
$$p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}$$

La forza è un vettore, e dunque si potrebbe obiettare che anche la pressione debba essere un vettore. Tuttavia la pressione è stata definita nel caso di un fluido in equilibrio, e pertanto la forza non può che essere ortogonale alla superficie: se infatti ci fosse una componente della forza non perpendicolare, tale componente metterebbe in moto il fluido, il che contrasterebbe con la supposizione che il fluido sia in quiete. Quindi la pressione ha carattere scalare e non vettoriale perché si suppone la forza sempre avente una direzione preferenziale, e cioè perpendicolare alla superficie.

7.1.1 Principio di Pascal

Il *principio di Pascal* afferma che in un fluido in quiete la pressione è la stessa in ogni suo punto. Infatti se così non fosse, la differenza di pressione fra due punti metterebbe in movimento il fluido, il che contrasterebbe con l'ipotesi di fluido in quiete.

Questo principio ha diverse applicazioni pratiche, per esempio il torchio idraulico e il martinetto idraulico. Il principio di funzionamento è basato proprio sul'uguaglianza della pressione. Si consideri schematicamente un condotto ripiegato ad U nel quale sia contenuto un fluido, solitamente un olio; sia A_1 l'area di una apertura e $A_2 >> A_1$ l'area dell'altra apertura

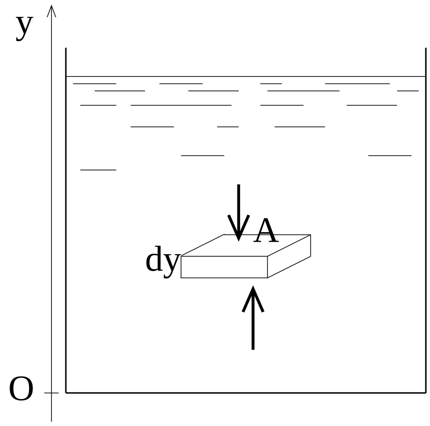


Se si esercita una forza F su A_1 la pressione sul fluido è $p = F/A_1$; questa pressione deve essere uguale sulla superficie A_2, dove quindi si avrà una forza $F' = pA_2 = F\ A_2/A_1 >> F$: si riesce così a "moltiplicare" una forza. Se per esempio la superficie A_2 è 100 volte la superficie A_1 si riesce a sollevare un peso 100 volte maggiore della forza applicata su A_1*.

* C'è moltiplicazione della forza non dell'energia, che ovviamente si conserva: se su A_1 si compie un

7.1.2 Legge di Stevino

Si abbia un fluido in equilibrio, e si consideri una sua porzione di area A e spessore infinitesimo dy



Siccome il fluido è in equilibrio, le forze agenti su questa porzione di fluido devono equilibrarsi. Ora sulla faccia inferiore agisce la forza $F_1 = pA$ diretta verso l'alto, mentre sulla faccia superiore agisce la forza $F_2 = -(p + \mathrm{d}p)A$ diretta verso il basso; inoltre su questo volume agisce pure la sua forza peso $P = -g\mathrm{d}m = -g\rho\mathrm{d}V = -g\rho A\mathrm{d}y$, dove ρ è la densità del fluido, sempre rivolta verso il basso. Allora deve essere

$$pA - (p + \mathrm{d}p)A - g\rho A\mathrm{d}y = 0$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\rho g \qquad \text{ovvero} \qquad \mathrm{d}p = -\rho g\mathrm{d}y$$

A questo punto occorre distinguere fra liquidi e gas. Nei primi la densità è una costante (giacché il fluido è incomprimibile): pertanto per integrazione diretta rimane

$$p(y) = p_0 + \rho g(y_0 - y) = p_0 + \rho gh$$

dove con h si indica l'altezza del liquido. Quindi per un liquido la pressione aumenta linearmente con la profondità.

---

lavoro L, lo stesso lavoro è compiuto dalla forza F' su A_2, quindi se la prima forza sposta il suo punto di applicazione di un tratto l, la seconda forza sposta il suo punto di applicazione di un tratto 100 volte più piccolo.

Nei gas invece la densità non è costante. Si può dimostrare tuttavia (come si vedrà nel prossimo Capitolo) che se la temperatura rimane costante la densità è proporzionale alla pressione, $\rho = kp$: allora

$$\mathrm{d}p = -kpg\mathrm{d}y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -kg\mathrm{d}y$$

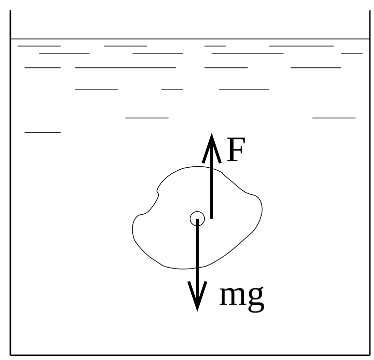
e per integrazione diretta rimane

$$p(y) = p_0 \mathrm{e}^{-kgy}$$

Quindi per un gas a temperatura costante la pressione diminuisce esponenzialmente col diminuire della profondità.

7.1.3 Spinta idrostatica

Si consideri un fluido in equilibrio in cui è immerso un corpo di forma qualsiasi



Tale corpo è sottoposto a due forze, la forza peso mg e la spinta derivante dal liquido circostante F (*spinta idrostatica*). Per conoscere il valore di tale forza, si proceda nel seguente modo. Si immagini di sostituire il corpo immerso con un volume dello stesso fluido avente la stessa forma nella stessa posizione. Poichè nulla è cambiato nel resto del fluido, la spinta che questo esercitava prima sul corpo deve essere la stessa che esercita ora sul volume di fluido. Ma tutto il fluido è in equilibrio, e quindi ora la spinta idrostatica deve essere in modulo pari al peso del volume di fluido (e avere stessa direzione e verso opposto), altrimenti quest'ultimo si metterebbe in moto. Ne consegue che la forza F esercitata dal resto del fluido sul corpo è pari al peso di una porzione di fluido avente lo stesso volume del corpo. E' questo il cosiddetto *principio di Archimede**: un corpo immerso in un fluido

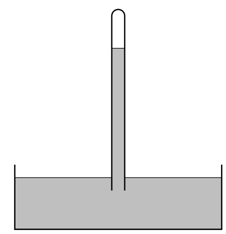
* A rigore si tratta di un teorema, giacché è stato dimostrato; il nome ha ragioni storiche.

riceve una spinta diretta dal basso verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato.

7.1.4 Misura della pressione

La pressione è la forza per unità di superficie. La sua unità di misura è il *pascal*, pari alla forza di 1 Newton che agisce sulla superficie di 1 m^2 : 1 Pa = 1 N/1 m^2 . Altre unità di misura sono l'*atmosfera* e il *bar*, che con il suo sottomultiplo, il *millibar*, era utilizzato fino a poco tempo fa nelle previsioni meteorologiche. Tutte queste unità però, come molte altre, sono state abolite, e nelle documentazioni ufficiali devono essere usate solo le unità del SI.

Gli strumenti per misurare la pressione dell'aria sono detti *barometri*. Il primo fu ideato da Torricelli e consiste in una provetta piena di mercurio parzialmente immersa in una vaschetta contenente anch'essa del mercurio (si usa un fluido ad alta densità per avere delle colonne non molto alte): la pressione dell'aria sulla superficie libera del mercurio deve essere uguale, per il principio di Pascal, alla pressione esercitata dalla colonna di mercurio nella provetta. Al livello del mare questa colonna è alta $h = 760\ mm$: dalla legge di Stevino si ricava allora

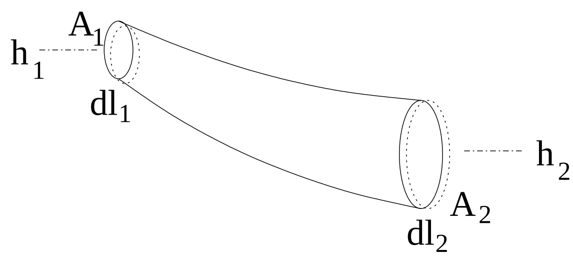


$$p_{atm} = \rho g h = 13.6 \cdot 10^3\ Kg/m^3 \times 9.8\ m/s^2 \times 0.76\ m = 1.02 \cdot 10^5\ Pa$$

I barometri oggi comunemente utilizzati sono invece costituiti da una scatola metallica in cui è stato fatto il vuoto: al variare della pressione esterna la parete metallica varia la sua concavità. Queste oscillazione sono trasmesse ad un indice che segna la pressione su una scala opportunamente tarata.

§ 7.2 Teorema di Bernouilli

Si consideri un liquido in moto stazionario. Il *moto stazionario* è caratterizzato dal fatto che ogni particella costituente il liquido si muove parallelamente alla altre, seguendo delle traiettorie, dette *linee di flusso*, che non si intersecano. In questo regime la velocità in ogni punto è funzione solo della posizione e non del tempo (ovvero questo regime mantiene le sue caratteristiche nel tempo). Si prenda in esame un *tubo di flusso*, cioè un insieme di queste traiettorie



Dopo un tempuscolo dt la superficie A_1 si sarà spostata di un tratto dl_1 e la superficie A_2 di un tratto dl_2. Per il teorema di conservazione dell'energia meccanica, la variazione di energia cinetica deve essere uguale al lavoro delle forze di pressione più la variazione di energia potenziale gravitazionale, non essendoci altri contributi. Il lavoro delle forze di pressione vale

$$\mathrm{d}L_p = p_1 A_1 \mathrm{d}l_1 - p_2 A_2 \mathrm{d}l_2$$

considerando la direzione reciproca delle forze di pressione e degli spostamenti. La variazione di energia potenziale è pari alla variazione di energia potenziale del primo e dell'ultimo elemento del tubo di flusso, giacché è come se tutti gli altri non si fossero mossi

$$\mathrm{d}E_g = E_{p_i} - E_{p_f} = \rho g h_1 A_1 \mathrm{d}l_1 - \rho g h_2 A_2 \mathrm{d}l_2$$

dove ρ è la densità del liquido, h_1 e h_2 le quote iniziale e finale del tubo di flusso, e $A_1\mathrm{d}l_1$ e $A_2\mathrm{d}l_2$ sono i volumi infinitesimi dei due elementi di flusso (che moltiplicati per la densità forniscono la loro massa). Anche per la variazione di energia cinetica si possono considerare solo il primo e l'ultimo elemento, per le stesse ragioni: quindi

$$\mathrm{d}K = \frac{1}{2}\rho A_2 \mathrm{d}l_2 v_2^2 - \frac{1}{2}\rho A_1 \mathrm{d}l_1 v_1^2$$

Dovendo essere

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}L_p + \mathrm{d}E_g$$

si ricava

$$\frac{1}{2}\rho A_2 \mathrm{d}l_2 v_2^2 + p_2 A_2 \mathrm{d}l_2 + \rho g h_2 A_2 \mathrm{d}l_2 = \frac{1}{2}\rho A_1 \mathrm{d}l_1 v_1^2 + p_1 A_1 \mathrm{d}l_1 + \rho g h_1 A_1 \mathrm{d}l_1$$

Ma il liquido è incompressibile e quindi deve mantenere il volume costante: allora i fattori $A_1 \mathrm{d}l_1 = A_2 \mathrm{d}l_2 = \mathrm{d}V$ si possono semplificare, e rimane

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h_1$$

ovvero

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h = \mathrm{cost}$$

quindi in un fluido in moto stazionario la somma di queste tre quantità rimane costante. Questa relazione è nota come *teorema di Bernouilli* ed è di estrema importanza nello studio del moto dei liquidi (e con una certa approssimazione dei fluidi in generale).

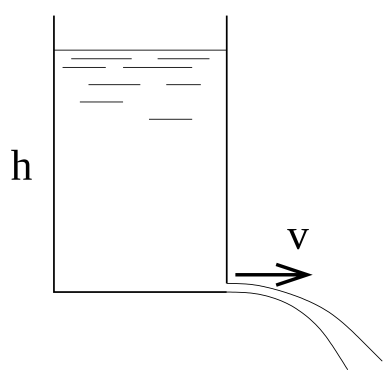
Il teorema di Bernouilli contiene in sé tutte le leggi sui fluidi: per esempio, se il fluido è in quiete, considerando due punti a quota 0 e h si ha

$$p = p_0 - \rho g h$$

che è la legge di Stevino (tenendo conto del segno di h).

7.2.1 Teorema di Torricelli

Si abbia un recipiente riempito di un liquido e dotato di un piccolo foro da cui il liquido fuoriesce; sia h l'altezza della superficie libera del liquido rispetto al foro. Si vuole conoscere la velocità con la quale il liquido fuoriesce. Questo risultato può essere agevolmente ottenuto utilizzando il teorema di Bernouilli, osservando che in questo caso è $p_1 = p_2 = p_{atm}$, giacché sia sul foro sia sulla superficie libera agisce la stessa pressione atmosferica: allora ponendo a 0 la quota del foro



$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h$$

Essendo il foro piccolo, la velocità di discesa del fluido è trascurabile: perciò sulla superficie libera del fluido si ha $v_0 \simeq 0$, e quindi si ottiene

$$\frac{1}{2}v^2 = gh \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gh}$$

ovvero la velocità di uscita è la stessa che avrebbe un grave cadendo da una altezza pari a quella del liquido: è questo il *teorema di Torricelli*.

7.2.2 Portata e legge di Leonardo

Si definisce *portata* la quantità di fluido che attraversa una sezione di un condotto nell'unità di tempo

$$Q = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho \mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho S v \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \rho S v$$

La *legge di Leonardo* afferma che la portata di un fluido è costante $Q = \mathrm{cost}$. Nel caso di un liquido, poi, visto che ha densità costante, questa legge si riscrive più semplicemente $Sv = \mathrm{cost}$: dove la sezione del condotto è minore la velocità del liquido è maggiore e viceversa.

7.2.3 Velocità e pressione

Nel caso di un condotto orizzontale, per il quale $h_1 = h_2$, il teorema di Bernouilli si riduce a

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \mathrm{cost}$$

ne segue che laddove la velocità del liquido è minore la pressione è maggiore e viceversa. In prima approssimazione questa legge è applicabile anche ai gas, ed è alla base di molti fenomeni tra cui la portanza delle ali di un aereo.

§ 7.3 Attrito e viscosità

In un fluido reale è presente e ineliminabile l'attrito fra le particelle che lo compongono. Come conseguenza il teorema di Bernouilli va modificato tenendo conto che nel moto una parte dell'energia viene dissipata in attrito: l'equazione di bilanciamento diventa

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 + L_{att}$$

Occorre allora stabilire una differenza di pressione per mantenere in moto il fluido. Infatti un fluido ideale si mantiene in moto uniforme in assenza di differenze di pressione, mentre una differenza di pressione causa una accelerazione del suo flusso. Invece un fluido reale in assenza di differenze di pressione tende a perdere velocità, giacché una parte dell'energia va persa in attrito, mentre per mantenerlo in moto uniforme occorre applicargli una differenza di pressione opportuna che compensi tali perdite. La potenza delle forze di attrito è data da

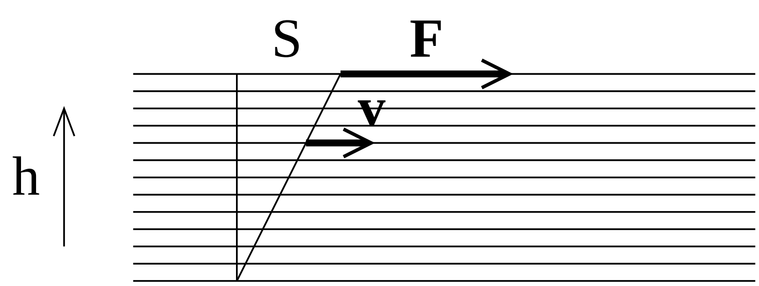
$$W_{att} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{F\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{A\Delta p\ v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = Q\Delta p$$

quindi è pari alla portata per la differenza di pressione.

7.3.1 Viscosità

Contrariamente ad un fluido ideale, le cui particelle scorrono le une sulle altre senza attrito, per mantenere in moto un fluido reale occorre applicargli una differenza di pressione, il cui lavoro si trasforma (in tutto o in parte) in calore a causa dell'attrito interno.

Si immagini di suddividere il fluido in strati paralleli di spessore infinitesimo: questi strati scorrono gli uni sugli altri nella direzione del moto a velocità differenti



L'elemento di superficie S di uno strato esercita sul corrispondente elemento dello strato adiacente una forza d'attrito di modulo F secondo la formula sperimentale

$$F = \eta S \frac{\partial v}{\partial h}$$

ovvero F risulta proporzionale alla superficie S e al gradiente di velocità $\frac{\partial v}{\partial h}$, cioè alla variazione di velocità in rapporto ad uno spostamento in direzione perpendicolare alla velocità stessa. Il coefficiente di proporzionalità η è detto *coefficiente di attrito interno* o *viscosità*.

Nei liquidi la viscosità diminuisce molto all'aumentare della temperatura, e in genere aumenta al crescere della pressione (l'acqua fa eccezione). Nei gas invece aumenta con la temperatura ed è praticamente indipendente dalla pressione.

Se si dispone di un condotto orizzontale di lunghezza L e raggio R, al cui interno scorre di moto laminare un liquido reale di viscosità η e ai cui capi è mantenuta una differenza di pressione Δp costante, la quantità V di fluido che vi scorre nel tempo t è data dalla *legge di Hagen–Poiseuille*

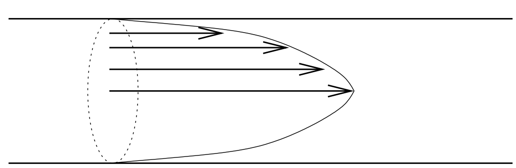
$$V = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L} t$$

ovvero è direttamente proporzionale alla quarta potenza del raggio e alla differenza di pressione, ed è inversamente proporzionale alla lunghezza del condotto e alla viscosità. Se poi il condotto non è orizzontale ma forma un angolo α con l'orizzontale, la formula si trasforma in

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \sin\alpha \right) t$$

dove ρ è la densità del fluido e g l'accelerazione di gravità.

Per un liquido reale il profilo di velocità, cioè la distribuzione della velocità lungo un condotto, assume la forma di un paraboloide: la velocità è massima al centro e decresce verso i lati, fino ad essere nulla per gli strati a diretto contatto col condotto



§ 7.4 Turbolenza

Quando un fluido si muove a velocità relativamente basse, il suo moto è laminare, ovvero tutti gli strati infinitesimi scorrono gli uni sugli altri senza intersecarsi. Quando invece la velocità del fluido è alta, si innescano dei moti turbolenti: in questo caso si formano dei vortici, in cui gran parte dell'energia va dispersa senza aumentare la velocità delle particelle di fluido

La descrizione del moto turbolento è assai più complessa, richiedendo lo studio di equazioni altamente non lineari. Il tipo di moto però può essere predetto dal valore del *numero di Reynolds* : se un fluido di densità ρ e viscosità η attraversa con velocità v un condotto di diametro d, il numero di Reynolds è definito come

$$R = \frac{vd\rho}{\eta}$$

Sperimentalmente si osserva che per valori $R \lesssim 2000$ il moto è laminare, se invece $R \gtrsim 5000$ il moto è turbolento. Per valori intermedi del numero di Reynolds il moto può passare improvvisamente da laminare a turbolento al minimo variare di condizioni esterne, quali la forma del condotto, la condizione delle sue pareti, e simili.

La formazione di vortici è importante in particolare nello studio del moto di un corpo all'interno di un fluido: questo infatti oppone una resistenza al moto, resistenza che dipende non solo dalla velocità del corpo, ma anche dalla sua sezione e dalla forma del corpo. A parità di sezione infatti forme più affusolate diminuiscono la formazione di vortici dietro il corpo in moto, i quali sono una delle cause principali di dissipazione dell'energia in attrito.