Mario Sitta

Esperienze di Meccanica e Termodinamica

Facoltà di Scienze M. F. N.

Università del Piemonte Orientale – Alessandria

Mario Sitta
Esperienze di Meccanica e Termodinamica
Edizione 1.2, Aprile 2006

L'Autore può essere contattato presso
Facoltà di Scienze M. F. N., C.so Borsalino 54, 15100 Alessandria, Italy

Questo testo è stato composto usando Plain TEX e con l'aiuto di alcune 'macro' sviluppate dall'Autore.

Il pendolo reversibile

§ 1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza è la misura del valore locale dell'accelerazione di gravità g.

§ 2 Fisica dell'esperienza

In generale un pendolo composto è costituito da un corpo S di forma qualsiasi sospeso in un punto e ruotante attorno ad un asse orizzontale passante per il punto di sospensione. Sia O il punto di sospensione del pendolo, $\mathbf{i}$ l'asse di rotazione e C la posizione del baricentro; sia l la distanza OC e θ l'angolo formato da OC con la verticale passante per O (Fig. 1).

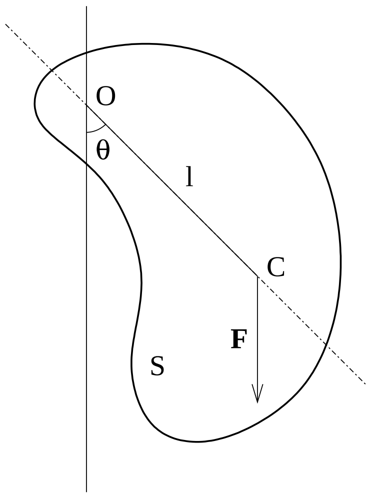

Fig. 1 *Pendolo composto*

Se si trascurano la spinta aerostatica e gli attriti, sul pendolo agisce solo la forza di gravità. Ad ogni elemento di massa dm del corpo S è applicata la forza $\mathrm{d}\mathbf{F} = -g\mathrm{d}m\mathbf{k}$, dove $\mathbf{k}$ è il versore orientato secondo la verticale verso l'alto. La risultante di tutti i termini $\mathrm{d}\mathbf{F}$ è la forza $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ (essendo m la massa totale del corpo S) applicata al baricentro

C. Il momento $\vec{\tau}$ della forza $\mathbf{F}$ rispetto al punto O, assunto come polo, è dato da

$$\vec{\tau} = \mathbf{l} \wedge \mathbf{F} \tag{1}$$

dove $\mathbf{l}$ è il vettore di posizione che da O individua C. Se poi si suppone che il piano verticale passante per O e C sia perpendicolare all'asse di rotazione (come avviene nel pendolo utilizzato nell'esperienza), si avrà $\vec{\tau} = \tau\mathbf{i}$.

In base alla meccanica dei corpi rigidi, se si indica con I il momento di inerzia di S rispetto all'asse di rotazione, si ha

$$\vec{\tau} = I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{i}$$

Si ha allora

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{i} = \mathbf{l} \wedge \mathbf{F}$$

e in forma scalare

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\sin\theta \tag{2}$$

L'equazione (2) non è un'equazione armonica, e la sua soluzione richiede l'uso degli *integrali ellittici.* Tuttavia se l'angolo di oscillazione è molto piccolo, si può utilizzare l'approssimazione $\sin\theta \simeq \theta$, e la precedente relazione si semplifica in

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\theta$$

ovvero

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = 0 \tag{3}$$

che è una equazione armonica facilmente risolubile. Essa rappresenta un moto armonico di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \tag{4}$$

T non è nient'altro che il periodo di oscillazione del pendolo. Da questa relazione è possibile ricavare g, ma occorre conoscere I ed l, cosa non certo facile dal punto di vista pratico.

Si supponga di sospendere lo stesso corpo S per un altro punto O' appartenente alla retta OC ma situato dalla parte opposta rispetto a C, e di farlo oscillare attorno ad un asse parallelo al precedente (Fig. 2)

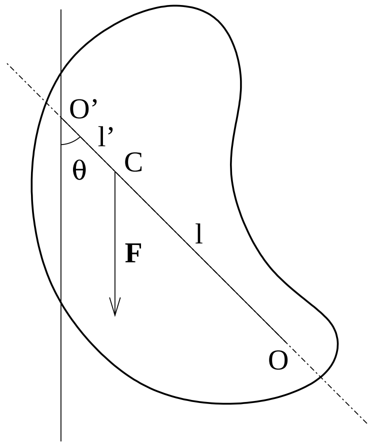

Fig. 2 *Pendolo composto sospeso ad un altro punto*

Sia l' la distanza $O'C$, I' il momento d'inerzia di S rispetto al nuovo asse di oscillazione, e T' il nuovo periodo di oscillazione: in maniera analoga a quanto fatto in precedenza, supponendo piccole oscillazioni, si ottiene

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{mgl'}}$$

In generale sarà $T \neq T'$; se però si riesce ad ottenere lo stesso periodo di oscillazione, ciò comporta

$$\frac{I'}{mgl'} = \frac{I}{mgl} \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{I'}{l'} = \frac{I}{l} \tag{5}$$

Se I_C è il momento di inerzia di S rispetto ad un asse passante per C e parallelo a quelli di oscillazione (cioè ad $\mathbf{i}$), per il teorema di Steiner I e I' sono dati da

$$I = I_C + ml^2 \qquad \text{e} \qquad I' = I_C + ml'^2$$

sostituendo tali valori nella (5) si ottiene

$$\frac{I_C + ml^2}{l} = \frac{I_C + ml'^2}{l'}$$

da cui si ricava* $I_C = mll'$.

Sostituendo il valore di I nella (4) si ricava allora

$$T = T' = 2\pi\sqrt{\frac{mll' + ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l + l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{6}$$

* Nell'ipotesi $l \neq l'$

Dalla relazione (6) risulta evidente che il periodo di oscillazione del pendolo composto, in questa circostanza particolare, è uguale a quello di un pendolo semplice di lunghezza $L = l + l'$, detta *lunghezza ridotta* di S, pari alla distanza fra i due punti di oscillazione O e O'. Dalla (6) inoltre è molto semplice ricavare il valore dell'accelerazione di gravità g una volta noti L e T

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \tag{7}$$

Si ricordi comunque che questa relazione vale solo se il corpo compie oscillazioni di ampiezza molto piccola. In caso contrario si può dimostrare che la formula completa del periodo di oscillazione è data da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \ldots\right] \tag{8}$$

dove θ_0 è l'ampiezza massima di oscillazione. Anche dalla (8) è possibile ricavare g.

§ 3 Descrizione della strumentazione

Il *pendolo reversibile* (o *pendolo di Kater*, Fig. 3) è un pendolo composto, costituito da un'asta di metallo dotata di due coltelli con gli spigoli paralleli e posti in prossimità dei suoi estremi. All'asta sono fissate due masse, una mobile posta tra i due coltelli ed una fissa posta ad una estremità esternamente al coltello.

Sono inoltre forniti un metro flessibile ed un cronometro.

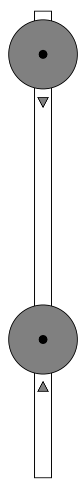

Fig. 3 *Schema del pendolo reversibile*

§ 4 Esecuzione dell'esperienza

I due coltelli di cui è dotata l'asta del pendolo corrispondono ai punti di oscillazione O ed O'; il pendolo viene fatto oscillare attorno agli spigoli di tali coltelli. Le oscillazioni devono essere di piccola ampiezza (si cerchi di misurarla), e devono avvenire in un piano verticale.

Occorre misurare la distanza L fra i due coltelli (con il suo errore) per poterla utilizzare nel calcolo di g.

Si procede per tentativi spostando la massa mobile alla ricerca di una posizione tale per cui $T = T'$. Ad ogni tentativo si misura la distanza fra le masse d e i due periodi di oscillazione. Quando ci si avvicina allo stesso valore conviene infittire le misure. Si prendono poi le medie dei valori più vicini per avere $\bar{T}$ e $\bar{T}'$. Questi valori vanno poi mediati fra loro dopo aver verificato, con un test di Student, che effettivamente siano mediabili: la variabile t di Student in questo caso è data da

$$t = \frac{(\bar{T} - \bar{T}') - \delta}{\sqrt{\frac{\Sigma_i (T_i - \bar{T})^2 + \Sigma_i (T'_i - \bar{T}')^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \tag{9}$$

con l'ipotesi $\delta = 0$ (e ovviamente $n_1 = n_2$). E' così possibile calcolare g (col suo errore) utilizzando sia la relazione (7) sia la (8).

E' possibile dimostrare che i periodi T e T' dipendono dal quadrato della distanza d fra le masse. Allora si può anche procedere in maniera differente, effettuando un fit parabolico dei dati raccolti: date tutte le coppie di punti misurate (d_i, T_i) si calcolano i parametri a, b, c in modo che la curva $T = a + bd + cd^2$ si adatti il meglio possibile ai dati sperimentali; analogamente dalle coppie di punti (d_i, T'_i) si determina la curva $T' = a' + b'd + c'd^2$ (ogni parametro sarà dato col rispettivo errore). La bontà del fit va verificata mediante un test del χ^2. A questo punto si possono calcolare le coordinate dei punti di intersezione fra le due parabole, e quindi i due valori del periodo $T = T'$ da sostituire nelle formule per il calcolo di g.

4.1 Stima degli errori

La misura del periodo, ottenuta per tentativi oppure dal fit parabolico, è affetta da un errore, $T \pm s_T$; lo stesso dicasi per la lunghezza del pendolo, $l \pm s_l$. Così la misura di g

sarà affetta da un errore s_g ottenuto propagando gli errori su T e l

$$s_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 s_T^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 s_l^2$$

Si supponga di usare la (7) per la determinazione di g: allora

$$\frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 l}{T^3} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

quindi

$$s_g^2 = \left(\frac{8\pi^2 l}{T^3}\right)^2 s_T^2 + \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 s_l^2$$

Il quadrato dell'errore relativo vale

$$\frac{s_g^2}{g^2} = \frac{4}{T^2}s_T^2 + \frac{1}{l^2}s_l^2 = 4\left(\frac{s_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{s_l}{l}\right)^2$$

quindi l'errore relativo sul periodo pesa quattro volte l'errore relativo sulla lunghezza ridotta del pendolo reversibile.

Il pendolo di Kater a disposizione in laboratorio ha una lunghezza di circa 1 m cui corrisponde un periodo dell'ordine di 2 s. Si supponga di voler misurare g con un errore del 5% : dovrà essere $\frac{s_g}{g} = 0.05$ e quindi

$$(0.05)^2 = 4\left(\frac{s_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{s_l}{l}\right)^2$$

Volendo dare lo stesso peso ad entrambi gli errori si avrà

$$\left(\frac{s_l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}(0.05)^2$$

ovvero $\frac{s_l}{l} \simeq 0.035$ e quindi, essendo $l \simeq 1\ m$, $s_l \simeq 3.5\ cm$. Poiché si ha a disposizione un metro flessibile con la sensibilità di 1 mm, questa richiesta è ampiamente soddisfatta. Si avrà poi

$$4\left(\frac{s_T}{T}\right)^2 = \frac{1}{2}(0.05)^2$$

ovvero $\frac{s_T}{T} \simeq 0.018$ e quindi, essendo $T \simeq 2\ s$, $s_T \simeq 0.036\ s$. Per la misura dei tempi si ha a disposizione un cronometro al centesimo di secondo; questo però è azionato manualmente, e a causa del ritardo fisiologico nei riflessi un operatore umano introduce un errore nella misura di un tempo che è valutabile in circa 0.2 s. Dato che il cronometro viene azionato due volte, alla partenza e all'arresto, i due errori si sommano in quadratura e pertanto l'errore sulla misura di tempo è di circa $s_t = \sqrt{(0.2)^2 + (0.2)^2} \simeq 0.28\ s$, decisamente troppo grande. Per ridurre l'errore relativo sulla misura del periodo invece di misurare un solo periodo di oscillazione se ne misurano n: così se t è il tempo trascorso dopo n oscillazioni complete, il periodo è $T = t/n$ e il suo errore $s_T = s_t/n$. In questo modo è possibile ridurre notevolmente l'errore relativo sul periodo. Per avere $s_T \simeq 0.04\ s$ sono necessarie almeno $n = 7$ oscillazioni complete; tuttavia si suggerisce di misurarne molte di più, $20 \div 40$

4.2 Discussione

Si confronti il risultato ottenuto con il valore noto; si discutano le ragioni di una eventuale discrepanza.

§ 5 Appendici

5.1 Valore locale di g

Per poter valutare la bontà della misura occorre ovviamente conoscere il valore locale dell'accelerazione di gravità g. Questo valore dipende innanzitutto dalla latitudine del luogo (sia perché al variare della latitudine cambia la distanza dall'asse di rotazione terrestre e quindi l'intensità della forza centrifuga che si oppone a g, sia perché la Terra non è una sfera perfetta, e quindi con la latitudine cambia, se pur di poco, la distanza dal centro di gravità terrestre). Detta φ la latitudine del luogo, a livello del mare il valore dell'accelerazione di gravità è dato da

$$\gamma = (9.780318\ m/s^2)(1 + 0.0053024 \sin^2\varphi - 0.0000059 \sin^2 2\varphi)$$

Se il luogo non si trova a livello del mare ma ad una altitudine h, occorre tener conto del fatto che aumenta la distanza dal centro di gravità terrestre e quindi diminuisce g (*correzione in aria libera* o *free-air reduction*): tale correzione è data da

$$\Delta g_f = 2 g_0 h/R$$

dove $g_0 = 9.832\ m/s^2$ è l'accelerazione di gravità ai poli e $R = 6371\ km$ è il raggio medio della Terra; con questi valori si ha quindi

$$\Delta g_f = (3.086 \cdot 10^{-6}) h\ m/s^2$$

con h espresso in m. Tuttavia se il luogo si trova ad altezza h, è vero che aumenta la distanza dal centro della Terra, ma occorre tener conto anche del fatto che c'è un eccesso di materiale terrestre al di sotto del luogo considerato, il che aumenta la forza di attrazione gravitazionale e di conseguenza il valore di g (*correzione di Bouguer* o *Bouguer reduction*): tale correzione è data da

$$\Delta g_B = 2\pi G \rho h$$

con G costante di gravitazione universale e ρ densità del materiale terrestre al di sotto del luogo. Se si assume il valore medio $\rho = 2670\ kg/m^3$ si ha

$$\Delta g_B = (1.118 \cdot 10^{-6}) h\ m/s^2$$

ancora con h espresso in m. Il valore locale di g è quindi dato da*

$$g = \gamma - \Delta g_f + \Delta g_B$$

5.2 Periodo di oscillazione nel caso generale

Come si è visto, l'espressione per il periodo $T = 2\pi\sqrt{I/mgl}$ vale solo nel caso in cui il pendolo compia piccole oscillazioni, per cui è valida l'approssimazione $\sin\theta \sim \theta$. Nel caso generale occorre risolvere l'equazione (2) che è una equazione differenziale del secondo ordine. Il problema però può essere semplificato usando il principio di conservazione dell'energia come integrale primo del moto. Infatti ad ogni istante l'energia totale del pendolo è data da

$$E = T + U = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

* In realtà queste due correzioni sono a loro volta affette da ulteriori fattori correttivi, detti *anomalia in aria libera* (*free-air anomaly*) e *anomalia di Bouguer* (*Bouguer anomaly*), che però sono in genere trascurabili.

(giacché ad ogni istante il centro di gravità C si trova ad una altezza $h = l(1 - \cos\theta)$ dal punto più basso di oscillazione). Poiché l'energia totale si conserva (avendo trascurato gli attriti), questo valore dell'energia deve essere uguale al valore dell'energia totale quando il pendolo si ferma nel suo punto più alto di oscillazione, dove possiede solo energia potenziale: pertanto deve essere

$$\frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

se θ_0 è l'angolo di massima oscillazione. Risolvendo in $\dot{\theta}^2$ si ha

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{I} mgl(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{4}{I} mgl \left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \right)$$

e quindi

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 2\sqrt{\frac{mgl}{I}} \left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \right)^{1/2}$$

da cui

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{mgl}} \; \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\theta_0/2 - \sin^2\theta/2}}$$

Il tempo che il pendolo impiega per passare dalla posizione verticale, $\theta = 0$, alla posizione di massima elongazione, $\theta = \theta_0$, è pari ad un quarto del periodo di oscillazione T, pertanto il periodo di oscillazione è dato da

$$T = 4\,\frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{I}{mgl}} \; \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\theta_0/2 - \sin^2\theta/2}}$$

Per semplificare l'integrale si ponga $k = \sin\theta_0/2$: allora rimane

$$T = 2\,\sqrt{\frac{I}{mgl}} \; \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{k\sqrt{1 - (\sin^2\theta/2)/k^2}}$$

Si sostituisca quindi $z = \frac{1}{k}\sin\frac{\theta}{2}$, per cui

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{2k}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{1 - k^2 z^2}}{2k}\mathrm{d}\theta$$

il periodo si può quindi esprimere come

$$T = 4\,\sqrt{\frac{I}{mgl}} \; \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1 - z^2)\;(1 - k^2 z^2)}} = 4\,\sqrt{\frac{I}{mgl}}\;\mathcal{I}$$

L'integrale $\mathcal{I}$ è una delle forme di *integrale ellittico completo del primo tipo*; esso non ha una espressione analitica, ma può essere facilmente valutato mediante una espansione in serie di potenze. Infatti ricordando che

$$\frac{1}{\sqrt{1-\delta}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 + \frac{5}{16}\delta^3 + \frac{35}{128}\delta^4 + \ldots$$

si ricava

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}} \simeq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{k^2z^2\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)}} +$$

$$+\frac{3}{8}\int_0^1 \frac{k^4z^4\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)}} + \frac{15}{48}\int_0^1 \frac{k^6z^6\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)}} + \ldots$$

Tutti questi integrali sono facilmente risolubili attraverso la sostituzione $z = \sin\varphi$, per cui $\mathrm{d}z = \cos\varphi\;\mathrm{d}\varphi$ (e, nell'intervallo di integrazione, $\sqrt{1-z^2} = \cos\varphi$): ad esempio

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)}} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{z^2\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)}} = \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\;\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}$$

e in generale

$$\int_0^1 \frac{z^{2n}\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)}} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\varphi\;\mathrm{d}\varphi$$

e mediante una integrazione per parti è possibile dimostrare* la relazione ricursiva

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\varphi\;\mathrm{d}\varphi = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}\varphi\;\mathrm{d}\varphi$$

Rimane quindi

$$\mathcal{I} \simeq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k^2 + \frac{9}{128}\pi k^4 + \ldots = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \ldots\right)$$

Il periodo del pendolo è quindi scrivibile come

$$T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta}{2} + \ldots\right)$$

da cui la (8).

* La dimostrazione è lsciata al lettore.

5.3 Formula di Bessel

A rigore l'equazione (7) può essere usata solo quando i due periodi di oscillazione, che ora per comodità chiameremo T_1 e T_2, sono uguali. E' possibile però ricavare una diversa espressione per g che può essere utilizzata quando i due periodi sono quasi, ma non esattamente, uguali. Si elevino a quadrato le due relazioni

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + ml_1^2}{mgl_1}}$$

e

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + ml_2^2}{mgl_2}}$$

Sommandole si ottiene

$$T_1^2 + T_2^2 = \frac{4\pi^2}{mg}\left(\frac{I_C + ml_1^2}{l_1} + \frac{I_C + ml_2^2}{l_2}\right) = \frac{4\pi^2}{mgl_1l_2}(l_1 + l_2)\ (I_C + ml_1l_2)$$

da cui

$$\frac{T_1^2 + T_2^2}{l_1 + l_2} = \frac{4\pi^2}{mgl_1l_2}(I_C + ml_1l_2)$$

mentre sottraendole si ha

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2}{mg}\left(\frac{I_C + ml_1^2}{l_1} - \frac{I_C + ml_2^2}{l_2}\right) = \frac{4\pi^2}{mgl_1l_2}(l_1 - l_2)\ (ml_1l_2 - I_C)$$

da cui

$$\frac{T_1^2 - T_2^2}{l_1 - l_2} = \frac{4\pi^2}{mgl_1l_2}(ml_1l_2 - I_C)$$

Sommando fra loro le due espressioni finali si ottiene una relazione semplice

$$\frac{T_1^2 + T_2^2}{l_1 + l_2} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{l_1 - l_2} = \frac{8\pi^2}{g}$$

per cui in generale g è dato da

$$g = \frac{8\pi^2}{\dfrac{T_1^2 + T_2^2}{l_1 + l_2} + \dfrac{T_1^2 - T_2^2}{l_1 - l_2}}$$

Si indichi con $T = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$ il periodo medio di oscillazione, e con $\Delta T = T_1 - T_2$ la differenza fra i due periodi: si può allora riscrivere come

$$g = \frac{8\pi^2}{\dfrac{T_1^2 + T_2^2}{L} + \dfrac{(T_1 - T_2)\ (T_1 + T_2)}{l_1 - l_2}} = \frac{8\pi^2 L}{T_1^2 + T_2^2 - \dfrac{2\ T\ \Delta T\ L}{L - 2l_1}}$$

dove $L = l_1 + l_2$ è al solito la lunghezza ridotta del pendolo. Questa espressione è esatta, e se $T_1 = T_2$ dà proprio l'equazione (7).

Se i due periodi sono molto simili ma non uguali, allora $T_1 \simeq T_2 \simeq T$ e perciò $T_1^2 + T_2^2 \simeq 2T^2$ e $\Delta T \simeq 0$; pertanto si ha

$$g \simeq \frac{8\pi^2 L}{2T^2 - \frac{2\,T\,\Delta T\,L}{L - 2l_1}} = \frac{4\pi^2 L}{T^2\left[1 - \frac{L\,\Delta T}{T\,(L - 2l_1)}\right]}$$

Assumendo che il pendolo sia sufficientemente asimmetrico, per cui l_1 differisce apprezzabilmente da $L/2$, poiché $\frac{\Delta T}{T} << 1$ si può effettuare uno sviluppo in serie dell'ultima espressione per g fermandosi al primo termine: ricordando che $\frac{1}{1-\delta} \simeq 1 + \delta$ rimane

$$g \simeq \frac{4\pi^2 L}{T^2}\left[1 + \frac{L\,\Delta T}{T\,(L - 2l_1)}\right] \simeq \frac{4\pi^2 L}{\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2}\left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}\,\frac{2L}{L - 2l_1}\right)$$

Quest'ultima espressione, che meglio si adatta al caso in cui i periodi siano molto simili ma non esattamente uguali, è probabilmente dovuta a Bessel. Si noti che il termine contenente l_1 è solo una piccola correzione, e quindi non è necessario misurare l_1 con grande precisione.

La bilancia di Cavendish

§ 1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza è la misura della costante di gravitazione universale G.

§ 2 Descrizione della strumentazione

Lo strumento è in sostanza una bilancia di torsione, costituita da un filo che sostiene un'asta orizzontale alle cui estremità sono montate due sfere di piombo uguali. Un sostegno ruotabile porta altre due sfere in piombo, molto più grandi delle prime. Il tutto è racchiuso in una scatola trasparente per ripararlo da correnti d'aria che potrebbero influire sulla misura. All'asta è fissato uno specchietto che riflette la luce proveniente da un piccolo proiettore; il raggio luminoso colpisce poi uno schermo graduato (costituito da una riga orizzontale) posto ad una distanza nota dalla bilancia: dallo spostamento della posizione del raggio luminoso è possibile risalire allo spostamento angolare dell'asta che regge le due sfere. In Fig. 1 è mostrato uno schema della bilancia di Cavendish.

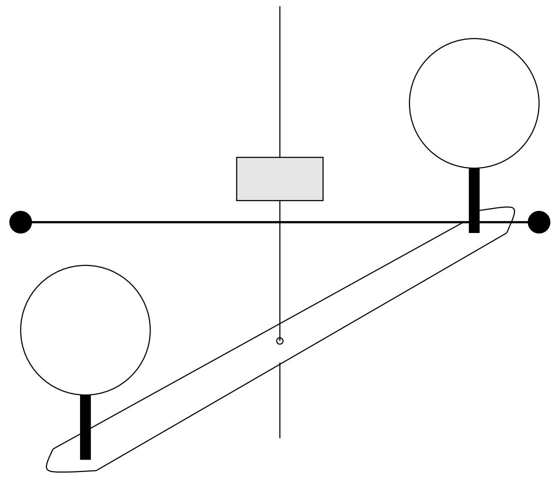

Fig. 1 *Schema della bilancia di Cavendish*

Sono inoltre a disposizione un cronometro ed un metro.

§ 3 Fisica dell'esperienza

La gravitazione universale di Newton stabilisce che due corpi puntiformi si attraggono reciprocamente con una forza la cui intensità è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Si indichino con m ciascuna delle masse piccole in oscillazione, M ciascuna delle masse grandi, d la distanza fra m e il filo, r la distanza fra m e M, e l la distanza del filo dallo schermo illuminato (Fig. 2)

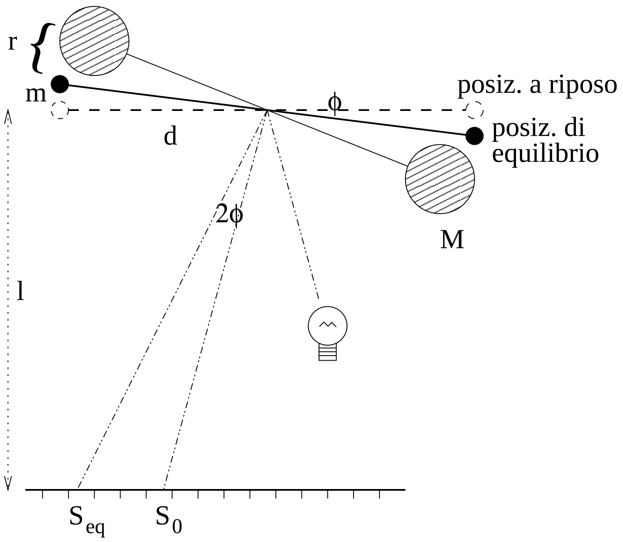

Fig. 2 *La bilancia durante le oscillazioni*

Quando le masse M vengono spostate, l'asta entra in oscillazione alla ricerca di una nuova posizione di equilibrio. Le forze agenti sono le forze gravitazionali F, la reazione elastica del filo (proporzionale all'angolo di rotazione secondo un coefficiente k) e l'attrito dell'aria (proporzionale alla velocità di rotazione del sistema secondo un coefficiente h). Se I è il momento d'inerzia del sistema asta–masse m e ϕ l'angolo di rotazione, il moto del sistema obbedisce alla legge

$$I\ddot{\phi} = 2Fd - k\phi - h\dot{\phi} \tag{1}$$

(F è la forza che si esercita fra ciascuna massa piccola m e la più vicina massa grande M).

Come prima approssimazione si possono trascurare la forza elastica del filo e l'attrito dell'aria. L'equazione allora si semplifica in

$$I\ddot{\phi} = 2Fd = 2G\frac{mM}{r^2}d \tag{2}$$

dove r è la distanza fra i baricentri di una massa m e la corrispondente M. Considerando le masse m puntiformi e trascurando il momento d'inerzia dell'asta, I vale $2md^2$, e quindi

$$G = \frac{I\ddot{\phi}r^2}{2mMd} = \frac{\ddot{\phi}dr^2}{M} \tag{3}$$

Occorre ora valutare $\ddot{\phi}$. L'ampiezza delle oscillazioni dell'asta è molto piccola, ma è misurabile dagli spostamenti del fascio di luce che colpisce lo schermo graduato. E' immediato dimostrare che se l'asta ruota di un angolo ϕ il fascio di luce si sposta di un angolo 2ϕ. Inoltre poiché gli angoli in questione sono assai piccoli e la distanza l dello schermo è molto maggiore dello spostamento lineare S del fascio sullo schermo, si può adottare l'approssimazione per cui $\sin\alpha \sim \alpha$. Quindi lo spostamento della posizione S del fascio sullo schermo è legato all'angolo di rotazione dell'asta ϕ dalla relazione $S = 2l\phi$. Pertanto $\phi = \frac{S}{2l}$ e derivando due volte rispetto al tempo $\ddot{\phi} = \frac{\ddot{S}}{2l}$. Da cui

$$G = \frac{dr^2}{2lM}\ddot{S} \tag{4}$$

Naturalmente l'accelerazione $\ddot{S}$ varia nel tempo, ma si può considerarla con buona approssimazione costante in un breve intervallo di tempo iniziale (dopodiché la reazione elastica del filo non è più trascurabile, anzi diventa determinante opponendosi alla rotazione dell'asta e impedendo alle masse m e M di arrivare a toccarsi).

Il metodo ora esposto permette di calcolare G semplicemente basandosi sull'accelerazione iniziale dell'asta, e per questo viene detto *metodo delle accelerazioni*. Come si può bene immaginare non c'è da aspettarsi una grande accuratezza sul valore così ottenuto a causa delle molte approssimazioni introdotte. Una stima migliore di G si ottiene con il *metodo delle oscillazioni smorzate*, mediante il quale si tiene conto di tutte le forze agenti sul sistema. L'equazione del moto (1) esprime un moto oscillatorio smorzato, la cui soluzione generale è data da

$$\phi(t) = A\ \mathrm{e}^{-\frac{h}{2I}t}\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{I} - \frac{h^2}{4I^2}}t + \phi_0\right) + \frac{2Fd}{k} \tag{5}$$

ossia, trascurando il termine $\frac{h^2}{4I^2}$ perché h è molto piccolo,

$$\phi(t) = A\ \mathrm{e}^{-\frac{h}{2I}t}\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t + \phi_0\right) + \frac{2Fd}{k} \tag{6}$$

dove A e ϕ_0 sono costanti determinabili imponendo delle condizioni iniziali. Il periodo di questo moto armonico smorzato è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \tag{7}$$

Trascurando il momento d'inerzia dell'asta e considerando le masse m puntiformi, come già in precedenza, si ha $I = 2md^2$ e quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2md^2}{k}}$$

Da questa relazione si può ricavare k

$$k = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2} \tag{8}$$

Ora è da osservare che nella relazione (6) il primo termine del secondo membro non rappresenta che una fase transitoria (al crescere del tempo l'esponenziale tende a zero), pertanto col passare del tempo le oscillazioni si smorzano e l'asta tende ad assumere la posizione di equilibrio $\phi_{eq} = \frac{2Fd}{k}$ cui corrisponde sullo schermo la posizione di equilibrio del raggio luminoso $S_{eq} = 2l\phi_{eq} = \frac{4lFd}{k}$. Da questo si ricava $F = \frac{kS_{eq}}{4ld}$. Infine ponendo $F = G\frac{mM}{r^2}$ e sostituendo F e k con le espressioni trovate in precedenza, si ottiene una relazione dalla quale è possibile calcolare G

$$G = \frac{2\pi^2 S_{eq} dr^2}{MlT^2} \tag{9}$$

Il valore così trovato per G, sebbene più attendibile di quello ottenuto col metodo delle accelerazioni, è affetto da errori sistematici dovuti a varie cause:

a) si è sempre considerata costante la forza F (a partire dalla risoluzione dell'equazione (1)), mentre essa varia dato che durante le oscillazioni cambia la distanza r fra le masse grandi M e le masse piccole m;

b) nella formula (6) si è trascurato il termine $\frac{h^2}{4I^2}$;

c) nel calcolo del momento di inerzia del sistema asta–masse m si è trascurato il momento di inerzia dell'asta stessa e si sono considerate puntiformi le masse m;

d) non si è tenuto conto del fatto che ogni massa piccola m viene attirata gravitazionalmente non solo dalla massa M più vicina ma anche da quella più lontana.

A queste cause vanno aggiunti gli inevitabili disturbi dall'esterno (presenza di altre masse che interagiscono col sistema, vibrazioni del piano di appoggio, ...).

Tra le cause di errore sistematico elencate, quella più importante è la quarta, che può essere facilmente eliminata apportando una correzione alla (9). Con riferimento alla Fig. 3, sia $\mathbf{F}'$ la forza che si esercita tra ogni massa m e la più lontana massa grande M.

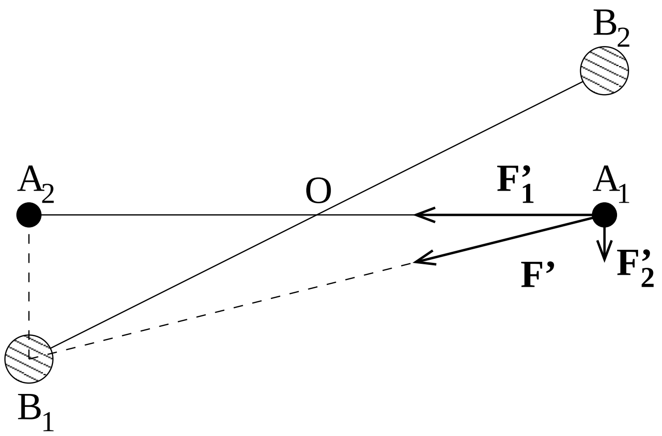

Fig. 3 *Forze agenti su una massa* m

$\mathbf{F}'$ agisce lungo la congiungente A_1B_1 e può essere scomposta in due componenti giacenti lungo l'asta A_1A_2 (componente $\mathbf{F_1'}$) e perpendicolarmente ad essa (componente $\mathbf{F_2'}$). La prima ha effetto nullo (essendo la barretta rigida), mentre la seconda diminuisce la forza di attrazione esercitata dalla massa M più vicina. Se si suppone il triangolo $A_1A_2B_1$ rettangolo in A_2, vero con buona approssimazione, per il modulo di $\mathbf{F_2'}$ si ottiene l'espressione

$$F_2' = G\frac{mMr}{(4d^2 + r^2)^{3/2}}$$

Tenendo conto di ciò l'intensità della forza che agisce su ogni massa m e che genera il momento torcente l'asta vale

$$F - F_2' = \frac{GmM}{r^2}\left[1 - \frac{r^3}{(4d^2+r^2)^{3/2}}\right]$$

La (9) perciò diventa

$$G = \frac{2\pi^2 S_{eq} d r^2}{MlT^2\left[1 - r^3/(4d^2+r^2)^{3/2}\right]} \tag{10}$$

Volendo si può tener conto pure della causa di errore sistrematico indicata al punto c): le masse m non sono puntiformi ma sono sfere omogenee di raggio a. Il momento di inerzia I (tenendo conto del teorema di Steiner) diventa

$$I = 2m\left(\frac{2}{5}a^2 + d^2\right)$$

Si può così calcolare il valore corretto di k e quindi quello di G

$$G = \frac{2\pi^2 S_{eq}(2a^2+5d^2)r^2}{5dMlT^2} \tag{11}$$

Combinando le due correzioni si arriva alla formula

$$G = \frac{2\pi^2 S_{eq}(2a^2+5d^2)r^2}{5dMlT^2\left[1 - r^3/(4d^2+r^2)^{3/2}\right]} \tag{12}$$

Le altre due cause di errore sistematico sono invece trascurabili, come sarà possibile verificare dall'analisi dei dati registrati.

§ 4 Esecuzione dell'esperienza

Innanzitutto occorre misurare la posizione iniziale sullo schermo del raggio luminoso. Quindi si sblocca la bilancia portando le sfere grandi nella posizione opposta (e cercando di perturbare il meno possibile il sistema) e si comincia a misurare la posizione del raggio luminoso mentre si sposta sullo schermo. Inizialmente tale posizione va rilevata ogni 5 secondi; dopo aver misurato un periodo e mezzo è possibile ridurre le misure ad una ogni 15 secondi, ed eventualmente dopo un altro periodo ad una ogni 30 secondi. Terminata l'esperienza si misura la distanza l fra la bilancia e lo schermo. Gli altri dati (r, d, M, m) sono a disposizione in Laboratorio.

Una volta raccolti tutti i dati si valutano le posizioni dei massimi e dei minimi di oscillazione (conviene avere una misura in più di uno dei due tipi, per esempio 6 massimi e 5 minimi). Si può così ricavare la posizione di equilibrio finale facendo la media dei massimi e la media dei minimi e quindi la media delle due medie. Da qui si ottiene lo spostamento S_{eq} come semidifferenza fra la posizione di equilibrio iniziale e quella finale. Note le posizioni dei massimi e dei minimi si calcolano gli intervalli di tempo fra due massimi consecutivi e se ne fa la media $\bar{T}_M$, e analogamente gli intervalli di tempo fra due minimi consecutivi e la loro media $\bar{T}_m$; il periodo medio T sarà a sua volta la media fra $\bar{T}_M$ e $\bar{T}_m$.

A questo punto si hanno tutti i dati per calcolare G tramite la (9) o la (10) o la (12).

Si è così utilizzato il metodo delle oscillazioni smorzate. Si invitano gli Studenti a provare ad usare anche il metodo delle accelerazioni, quantunque questa approssimazione richieda molta cautela: inizialmente infatti la bilancia si trova in una situazione di equilibrio giacché la reazione elastica del filo si oppone alla forza gravitazionale che tenderebbe a portare le masse M e m a contatto. Il momento della forza elastica è in modulo uguale a quello delle forze gravitazionali e quindi tuttaltro che trascurabile. Tuttavia si può seguire questo ragionamento: non appena le masse grandi vengono spostate e l'asta entra in oscillazione, la reazione elastica del filo torto favorisce il movimento dell'asta stessa; non appena però l'asta supera la posizione di riposo la reazione del filo comincia ad opporsi alla rotazione. Conviene allora scegliere l'intervallo di tempo iniziale in modo che i contributi opposti della forza elastica del filo si annullino a vicenda (tipicamente durante il quale l'asta compie quasi mezza oscillazione). I dati osservati vanno sottoposti a fit parabolico del tipo

$$S - S_0 = ct^2 + b$$

dove S_0 è la posizione iniziale sullo schermo. Derivando due volte rispetto al tempo si ha $\ddot{S} = 2c$, che va sostituito nella (4) per il calcolo di G.

4.1 Stima degli errori

Si è detto che non si è tenuto conto di tutte le cause che possono indurre errori sistematici nella misurazione di G. Occorrerebbe verificare in particolare che le correzioni indicate ai punti a) e b) siano non significative.

a) La forza **F** non è costante dato che durante le oscillazioni la distanza fra le masse m e M varia. Se s è la distanza di ogni massa m dalla propria posizione di riposo, si ha con buona approssimazione $s = d\phi$: se s aumenta diminuisce la distanza r fra m e M e quindi aumenta la forza **F**, e viceversa se s diminuisce. Ora da $S = 2l\phi$ si ricava $s = d\frac{S}{2l}$. Dai dati raccolti si ha il valore massimo e il valore minimo che S assume durante la misura, e di conseguenza i valori massimo e minimo di s e pertanto la sua variazione Δs, che è una buona stima della variazione massima di r. Si verifichi che Δs è inferiore all'errore con cui è noto il valore di r.

b) Si è trascurato il termine $\frac{h^2}{4I^2}$ nella (5). Ora si ha

$$S - S_{eq} = 2lA\ \mathrm{e}^{-\frac{h}{2I}t}\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{I} - \frac{h^2}{4I^2}}t + \phi_0\right)$$

Per comodità si ponga $S - S_{eq} = y$ e $\sqrt{\frac{k}{I} - \frac{h^2}{4I^2}} = \omega$: allora

$$y = 2lA\ \mathrm{e}^{-\frac{h}{2I}t}\ \cos\left(\omega t + \phi_0\right)$$

Derivando rispetto al tempo si ha

$$\dot{y} = 2lA\ \mathrm{e}^{-\frac{h}{2I}t}\left[-\frac{h}{2I}\cos(\omega t + \phi_0) - \omega\sin(\omega t + \phi_0)\right]$$

che si annulla negli istanti t_n tali che

$$\tan(\omega t_n + \phi_0) = -\frac{h}{2I\omega}$$

cioè

$$t_n = -\frac{\phi_0}{\omega} + \frac{1}{\omega}\arctan\frac{-h}{2I\omega} + \frac{(n-1)\pi}{\omega}$$

In corrispondenza di questi istanti y assume i valori estremi (massimi o minimi) Y_n

$$\begin{aligned} Y_n &= 2lA\ \mathrm{e}^{-\frac{h}{2I}t}\cos\left[+\arctan\frac{-h}{2I\omega} + \frac{(n-1)\pi}{\omega}\right] = \\ &= (-1)^{n-1}2lA\ \mathrm{e}^{-\frac{h}{2I}t}\ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-h}{2I\omega}\right)^2}} \end{aligned}$$

(si ricordi che $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$). Se n è pari y è negativo e si ha un minimo, mentre gli n dispari corrispondono ai massimi di y. Un periodo di oscillazione T corrisponde quindi all'intervallo di tempo $t_{n+2} - t_n$, e per N periodi di oscillazione si ha $NT = t_{n+2N} - t_n$ che implica

$$\frac{Y_n}{Y_{n+2N}} = \mathrm{e}^{-\frac{h}{2I}(t_n - t_{n+2N})} = \mathrm{e}^{\frac{hTN}{2I}}$$

da cui è semplice ricavare h

$$h = \frac{2I}{NT} \ln \frac{Y_n}{Y_{n+2N}}$$

Assumendo che Y_n sia il primo massimo di oscillazione e Y_{n+2N} l'ultimo massimo registrato (quindi dopo N oscillazioni complete), si calcoli il valore di h e si confronti il rapporto $\frac{h^2}{4I^2}$ con $\frac{k}{I}$ e si verifichi che l'approssimazione fatta trascurandolo sia giustificata.

4.2 Discussione

Si calcoli G con e senza tutte le correzioni apportate (ovvero usando le formule (9), (10), (11) e (12)), e si valuti il contributo percentuale di ciascuna e quale sia la più importante. Si calcoli poi G col metodo più approssimato delle accelerazioni e si valuti di quanto peggiora la misura. Infine si confrontino i valori ottenuti col valore noto di G e si discutano le cause di una eventuale discrepanza.

Il pendolo di torsione

§ 1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza è la verifica della legge di Steiner e la misura di momenti di inerzia.

§ 2 Fisica dell'esperienza

Dato un corpo esteso di massa m, se I_0 è il momento di inerzia di tale corpo rispetto ad un asse τ_0 passante per il suo baricentro, il suo momento di inerzia I rispetto ad un asse τ parallelo a τ_0 è dato dalla *legge di Steiner*

$$I = I_0 + mr^2 \tag{1}$$

dove r è la distanza nello spazio fra i due assi considerati.

Tenendo conto che il momento di inerzia di una massa puntiforme m rispetto ad un asse τ è definito come $I = mr^2$, con r distanza della massa dall'asse, e che un corpo esteso può essere scomposto in un insieme di masse infinitesime ognuna delle quali può essere considerata puntiforme, è immediato verificare che

1) il momento di inerzia di una sbarra di massa M, lunghezza L e spessore trascurabile rispetto ad un asse passante per il suo baricentro e perpendicolare alla sbarra vale

$$I = \frac{1}{12}ML^2 \tag{2}$$

2) il momento di inerzia di un cerchio di massa M, raggio R e spessore trascurabile rispetto ad un asse esterno ad esso e posto ad una distanza d (Fig. 1) vale

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2 \tag{3}$$

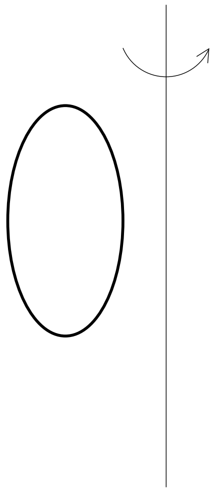

Figura 1

(può essere calcolato considerando un tratto infinitesimo di arco di circonferenza)

3) il momento di inerzia di una guaina cilindrica di massa M, raggio R, altezza h e spessore trascurabile, rispetto ad un asse passante per il baricentro e perpendicolare all'asse della guaina (Fig. 2), vale

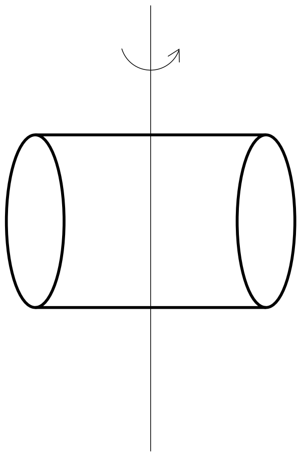

Figura 2

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 \tag{4}$$

(può essere calcolato scomponendo la guaina in cerchi di spessore infinitesimo a distanza x dall'asse, il cui momento di inerzia è dato dalla formula precedente, e poi integrando)

4) il momento di inerzia di un cilindro pieno di massa M, raggio R e altezza h, rispetto

ad un asse passante per il baricentro e perpendicolare all'asse del cilindro, vale

$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 \tag{5}$$

(può essere calcolato scomponendo il cerchio in guaine di spessore infinitesimo e di raggio x, il cui momento di inerzia è dato dalla formula precedente, e poi integrando)
4bis) il momento di inerzia di un cilindro cavo di massa M, raggio interno R_1, raggio esterno R_2 e altezza h, rispetto ad un asse passante per il baricentro e perpendicolare all'asse del cilindro, vale

$$I = \frac{1}{4}M(R_1^2 + R_2^2) + \frac{1}{12}Mh^2 \tag{6}$$

(può essere calcolato come il caso precedente).

§ 3 Descrizione della strumentazione

Il *pendolo di torsione* è costituito da un'asta di metallo orizzontale inserita in un albero verticale dotato di molla, che le permette di compiere oscillazioni. L'asta è dotata di alcune incisioni a distanze fisse sulle quali possono essere posizionate due masse cilindriche uguali: queste infatti sono provviste di un foro lungo l'asse del cilindro nel quale può essere inserita l'asta, e di un piccolo fermo a molla per mantenere la posizione voluta sull'asta.

Sono inoltre forniti un cronometro, un metro flessibile, una bilancia di precisione ed un calibro.

Figura 3 *Il pendolo di torsione*

§ 4 Esecuzione dell'esperienza

Occorre innanzitutto misurare il periodo di oscillazione della sola asta, posta in posizione simmetrica. Quindi si inseriscono i cilindretti, uno per parte ancora in posizione simmetrica rispetto all'asse, e si misurano i periodi di oscillazione al variare della distanza dall'asse. Infine si misurano la lunghezza dell'asta, la posizione delle scanalature sull'asta, i raggi e l'altezza dei cilindri, e la massa dell'asta e dei cilindri.

Per misurare il periodo di oscillazione conviene caricare la molla facendo compiere all'asta un giro completo. Lasciata libera l'asta si misura il tempo t necessario affinché essa compia $n = 4 \div 5$ oscillazioni complete (non di più in quanto le oscillazioni si smorzano rapidamente). Il periodo è quindi dato da $T = t/n$ (per l'errore su t e T si applicano le stesse considerazioni esaminate per la misura del periodo di oscillazione del pendolo reversibile). E' conveniente ripetere l'intera misura alcune volte (cinque ad esempio) e applicare poi l'analisi statistica.

Se avanza tempo si possono compiere altre misure, per esempio ponendo i cilindretti oppure l'asta in posizioni non simmetriche.

4.1 Analisi dei dati

Il periodo di oscillazione della sola asta è dato da

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{K}} \tag{7}$$

con $I_0 = \frac{1}{12}mL^2$ e K costante della molla. Aggiungendo i due cilindretti a distanza d dall'asse il periodo si modifica in

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} \tag{8}$$

con $I = I_0 + 2I_C$, I_C momento d'inerzia di ciascun cilindretto dato da

$$I_C = I_{C_0} + Md^2$$

dove I_{C_0} è il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il baricentro. Quindi il momento di inerzia totale ha una dipendenza quadratica dalla distanza d

$$I = I_0 + 2I_{C_0} + 2Md^2 = A + B\ d^2 \tag{9}$$

Quadrando le espressioni in (7) e (8) e dividendo membro a membro si ricava

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{I}{I_0}$$

e pertanto anche il quadrato del periodo di oscillazione dell'asta con i cilindretti ha una dipendenza dal quadrato della distanza dei cilindretti dall'asse

$$T^2 = \frac{T_0^2}{I_0}\left(A + B\ d^2\right) = \alpha + \beta\ d^2 \tag{10}$$

con α e β costanti

$$\alpha = T_0^2 + 2\frac{I_{C_0}}{I_0}T_0^2 \qquad\qquad \beta = \frac{2M}{I_0}T_0^2$$

Una volta raccolti i dati, si avranno a disposizione una serie di valori del periodo di oscillazione T in funzione della distanza d : si effettui allora un fit lineare sui quadrati dei periodi e delle distanze $y = a + bx$ con $y = T^2$ e $x = d^2$ (o, se si preferisce, un fit parabolico $y = a + bx^2$ con $y = T^2$ e $x = d$). Ricavati i valori sperimentali di a e b li si confronti con i valori teorici aspettati α e β, eventualmente mediante test statistici.

Si possono fare dei confronti con "modelli" diversi. In prima approssimazione i cilindretti possono essere considerati puntiformi: allora $I_{C_0} = 0$ e $\alpha \simeq T_0^2$: in questa ipotesi quindi il parametro α sarà uguale al quadrato del periodo di oscillazione dell'asta vuota (il parametro β è indipendente dal modello assunto). Evidentemente questa approssimazione non darà buoni risultati, in quanto i cilindretti sono lungi dall'essere puntiformi, specie quando sono molto vicini all'asse di oscillazione, quando cioè h è confrontabile con d. Come seconda ipotesi i cilindretti si possono assumere pieni: allora I_{C_0} è dato dalla (5). Questa ipotesi dovrebbe dare risultati abbastanza buoni, giacché la porzione di volume contenuta nel foro di ciascun cilindretto è una piccola frazione del loro volume totale (si verifichi analiticamente se ciò sia vero). Infine l'ipotesi più aderente alla realtà prevede i cilindretti cavi, per cui I_{C_0} è dato dalla (6). Di fatto quindi il valore sperimentale di α va confrontato con tre valori teorici diversi.

Se sono state effettuate altre misure, per esempio con tutti e due i cilindri da un lato a distanze diverse, si confronti il valore sperimentale del periodo T con il valore teorico aspettato dato dalla (8), dove è sempre $I = I_0 + I_{C_1} + I_{C_2}$, e $I_{C_1} = I_{C_0} + Md_1^2$,

$I_{C_2} = I_{C_0} + Md_2^2$. Se invece ad esempio l'asta non era in posizione simmetrica, si usi ancora la (8), dove però $I = I_{asta} + I_{C_1} + I_{C_2}$ (i momenti dei due cilindri possono pure essere uguali) e $I_{asta} = I_0 + mr^2$ se m è la massa dell'asta e r la distanza del suo baricentro dall'asse di rotazione.

4.2 Discussione

Si confrontino i risultati ottenuti con i valori aspettati; si discutano le ragioni di una eventuale discrepanza.

Il viscosimetro

§ 1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza è la misura dell'attrito interno (viscosità) di un olio minerale ad una data temperatura.

§ 2 Fisica dell'esperienza

Contrariamente ad un fluido ideale, le cui particelle scorrono le une sulle altre senza attrito, per mantenere in moto un fluido reale occorre applicargli una differenza di pressione, il cui lavoro si trasforma (in tutto o in parte) in calore a causa dell'attrito interno.

Si immagini di suddividere il fluido in strati paralleli di spessore infinitesimo: questi strati scorrono gli uni sugli altri nella direzione del moto a velocità differenti (Fig. 1).

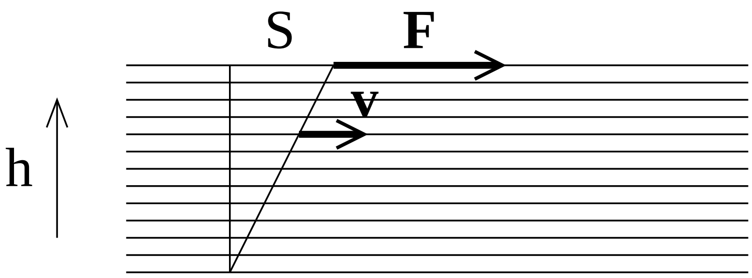

Fig. 1 *Moto di un fluido reale*

L'elemento di superficie S di uno strato esercita sul corrispondente elemento dello strato adiacente una forza d'attrito di modulo F secondo la formula sperimentale

$$F = \eta S \frac{\partial v}{\partial h} \tag{1}$$

ovvero F risulta proporzionale alla superficie S e al gradiente di velocità $\frac{\partial v}{\partial h}$, cioè alla variazione di velocità in rapporto ad uno spostamento in direzione perpendicolare alla velocità stessa. Il coefficiente di proporzionalità η è detto *coefficiente di attrito interno* o *viscosità*.

Nei fluidi la viscosità diminuisce molto all'aumentare della temperatura (perciò è necessario misurarla e mantenerla costante durante l'esecuzione dell'esperienza), e in genere aumenta al crescere della pressione (l'acqua fa eccezione). Nei gas invece aumenta con la temperatura ed è praticamente indipendente dalla pressione.

Se si dispone di un condotto orizzontale di lunghezza L e raggio R, al cui interno scorre di moto laminare un fluido reale di viscosità η e ai cui capi è mantenuta una differenza di pressione Δp costante, la quantità V di fluido che vi scorre nel tempo t è data dalla legge di Hagen–Poiseuille

$$V = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L} t \tag{2}$$

Se poi il condotto non è orizzontale ma forma un angolo α con l'orizzontale, la formula si trasforma in

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} + \mu g \sin\alpha \right) t \tag{3}$$

dove μ è la densità del fluido e g l'accelerazione di gravità. Risolvendo rispetto a η si ottiene

$$\eta = \frac{\pi R^4}{8V} \left(\frac{\Delta P}{L} + \mu g \sin\alpha \right) t \tag{4}$$

pertanto da misure del tempo di efflusso e delle caratteristiche geometriche del condotto è possibile una misura assoluta della viscosità. Tuttavia questa è spesso un'operazione complessa, e si preferisce ricorrere ad una misura relativa di η, confrontando il tempo di efflusso del fluido in esame con quello di un altro fluido a viscosità nota e operando nelle stesse condizioni.

Gli apparecchi per la misura relativa della viscosità sono detti *viscosimetri.*

§ 3 Descrizione della strumentazione

Il *viscosimetro di Ostwald* è costituito essenzialmente da un tubo ripiegato ad U (Fig. 2). Un ramo di tale tubo è capillare e collegato ad un rubinetto, che può metterlo in comunicazione con una pompa a vuoto o con l'ambiente esterno. Il tutto è immerso in

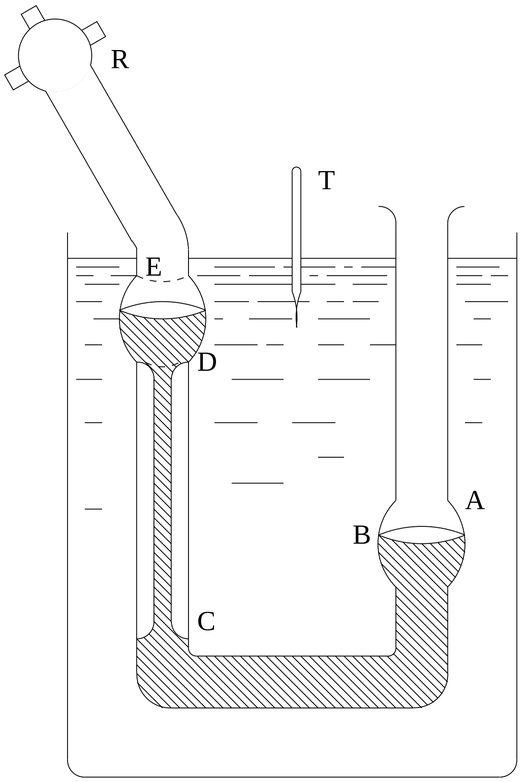

Fig. 2 *Schema del viscosimetro di Ostwald*

un bagno termostatico di cui si può conoscere la temperatura (che va mantenuta costante) tramite il termometro T

Si dispone inoltre di due cronometri.

§ 4 Esecuzione dell'esperienza

Per eseguire le misure, si riempie l'ampolla A con una certa quantità di olio fino alla tacca B. Agendo sul rubinetto R si collega il viscosimetro alla pompa a vuoto e si aspira l'olio lungo il capillare CD, quindi si chiude il rubinetto quando il fluido ha raggiunto la tacca E (operando particamente conviene chiuderlo un istante prima, poiché a causa della depressione prodotta dalla pompa l'olio tende a salire per un breve intervallo di tempo dopo la chiusura di R: questa precauzione evita che il fluido trabocchi oltre E). Questa operazione va compiuta con una certa cautela affinché non si formino bolle d'aria nella massa del liquido.

Sempre tramite R si collega poi il viscosimetro con l'ambiente esterno, col che il fluido inizia a scendere lungo il capillare. Con un cronometro si misura il tempo necessario perché il pelo libero dell'olio scenda dalla tacca E alla tacca D. Si ripete più volte la misura per poter applicare l'analisi statistica ai dati raccolti.

Dalla legge di Hagen–Poiseuille si ottiene

$$\eta_1 = \frac{\pi R^4}{8V} \left(\frac{\Delta P}{L} + \mu_1 g \right) t_1$$

(nel caso del viscosimetro di Ostwald il tubo è verticale e quindi $\alpha = 90^o$).

Quindi si sostiuisce l'olio con un altro liquido campione di cui sia nota la densità (di solito acqua). Operando nello stesso modo si ottiene il tempo che esso impiega a scendere da E a D nelle stesse condizioni. Allora

$$\eta_0 = \frac{\pi R^4}{8V} \left(\frac{\Delta P}{L} + \mu_0 g \right) t_0$$

Dividendo membro a membro queste due relazioni si ha

$$\frac{\eta_1}{\eta_0} = \frac{\Delta p + \mu_1 L g}{\Delta p + \mu_0 L g} \; \frac{t_1}{t_0}$$

Nel caso specifico del viscosimetro di Ostwald però è $\Delta p = 0$ in quanto su entrambi i peli liberi in E e in B agisce solo la pressione atmosferica, uguale nei due punti. Pertanto rimane

$$\frac{\Delta p + \mu_1 L g}{\Delta p + \mu_0 L g} = \frac{\mu_1}{\mu_0}$$

da cui

$$\eta_1 = \eta_0 \; \frac{\mu_1}{\mu_0} \; \frac{t_1}{t_0} \tag{5}$$

Il termine $c = \frac{\eta_0}{\mu_0 t_0}$ è una costante fissata dal Costruttore dell'apparecchiatura (*costante del viscosimetro*): si può così misurare il rapporto

$$\eta_1' = \frac{\eta_1}{\mu_1} = c \; t_1$$

detto anche *viscocità relativa* o *cinematica*; se poi è nota la densità μ_1 dell'olio, si può determinare anche la *viscosità assoluta* o *dinamica* η_1.

4.1 Analisi dei dati

Si effettua una serie n di misurazioni (per esempio, $n = 30$), in ognuna delle quali si misura il tempo di efflusso t con due cronometri. Ognuno di questi ha una precisione di 0.01 s; tuttavia ogni volta che esso viene azionato dall'operatore umano questi introduce una indeterminazione che può essere stimata in 0.2 s. Dato che ogni misura i di t è calcolata come $t_i = t_{i_f} - t_{i_i}$ e quindi il cronometro viene azionato due volte, l'errore di ciascuna misura, ottenuto per propagazione gaussiana, è $s_{t_i} = 0.28\ s$.

Di ciascuna serie di misure si calcola il valore medio ed il suo errore; nota poi la Costante del viscosimetro si può ottenere il valore della viscosità col suo errore. Quindi si verifica con un test normale se i due valori siano mediabili, e in caso affermativo se ne fa la media. Per questo si valuta la variabile

$$u = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sqrt{\sigma^2_{\eta_1} + \sigma^2_{\eta_2}}}$$

che si comporta come una variabile normale, centrata e ridotta. Scelto un margine di fiducia da entrambe le bande, cui corrisponde un certo valore critico u_{cut}, se avviene che $-u_{cut} < u < u_{cut}$ il test si considera positivo e le due grandezze η_1 e η_2 sono mediabili. Alternativamente si può applicare il test di Student alle due serie di tempi misurati: se le medie dei tempi di efflusso sono mediabili, se ne fa la media e successivamente si calcola da questa il valore della viscosità.

Supponendo che il tempo sia una variabile casuale il cui comportamento varia a causa delle condizioni esterne, si può applicare l'analisi statistica al campione di dati ottenuto. Si vuole verificare se la distribuzione dei tempi sia normale, e per fare questo conviene suddividere i dati in classi di ampiezza Δt pari alla varianza s_t del campione

$$s_t = \sqrt{\frac{\Sigma(t_i - \bar{t})^2}{n-1}}$$

Quindi si verifica mediante un test del χ^2 se in effetti i dati seguano una distribuzione normale. Per fare questo si calcolano le frequenze sperimentali O_i in ciascuna classe i, e poi le corrispondenti frequenze teoriche E_i estratte da una distribuzione normale

$$E_i = \frac{n\Delta t}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dove x è il punto medio della i-esima classe, n è il numero di misure, e μ e σ sono stimate dal valor medio $\bar{t}$ e dalla varianza s_t del campione. Infine si calcola la variabile

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

dove k è il numero di classi. La variabile $\hat{\chi}^2$ si comporta come un χ^2 con $k - 3$ gradi di libertà. Fissato un margine di fiducia, si calcola il valore critico della variabile e se $\hat{\chi}^2$ risulta inferiore il test si considera positivo e si può ritenere che i dati seguano una distribuzione normale. Affinché il test sia significativo però è conveniente che in ciascuna classe E_i sia almeno 5: se ciò non avviene si possono unire tra loro le classi con un numero inferiore di elementi.

Questa analisi va effettuata per entrambe le serie di misure.

Infine se possibile si ripete la serie di misure per un'altra temperatura del bagno termostatico, e vi si applica la stessa procedura di analisi dati.

Il calorimetro

§ 1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza è determinare il calore specifico di un dato corpo (una treccia di rame) e l'equivalente in acqua del calorimetro impiegato nell'esperienza.

§ 2 Fisica dell'esperienza

Quando la temperatura di un corpo aumenta di un certo ΔT si verifica un corrispondente scambio di calore ΔQ fra il corpo e l'ambiente circostante, secondo la legge

$$\Delta Q = C\Delta T \tag{1}$$

dove con C si indica la *capacità termica* del corpo in esame. Essa rappresenta la quantità di calore necessaria ad aumentare di un grado la temperatura del corpo, e dipende dalla natura di quest'ultimo, dal tipo di trasformazione subita e dalla temperatura alla quale avviene lo scambio di calore. Solitamente si prendono in considerazione la capacità termica *a pressione costante* C_p e la capacità termica *a volume costante* C_V, a seconda che si tratti di una trasformazione isobara o isocora.

Per corpi omogenei (come la treccia di rame usata nell'esperienza) C è proporzionale alla massa m del corpo in esame

$$C = mc$$

dove c indica il *calore specifico* della sostanza di cui il corpo è composto. Sostituendo questa espressione nella (1) si ottiene

$$\Delta Q = mc\Delta T$$

da cui

$$c = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \tag{2}$$

c quindi rappresenta la quantità di calore necessaria ad innalzare di un grado la temperatura dell'unità di massa della sostanza. Come C anche c dipende dal tipo di trasformazione subita e dalla temperatura a cui essa avviene. Per corpi non omogenei la capacità termica è la somma delle capacità termiche delle varie parti omogenee

$$C = \Sigma C_i = \Sigma m_i c_i \tag{3}$$

Gli strumenti per la misura delle capacità termiche vengono detti *calorimetri*.

§ 3 Descrizione della strumentazione

Il *calorimetro delle mescolanze* (o *calorimetro di Regnault*) è costituito da un vaso calorimetrico V (Fig. 1), che può essere in ottone o in rame, racchiuso in un vaso più grande R, che presenta una doppia parete contenente acqua. Le pareti dei recipienti sono lisce e lucide al fine di diminuire notevolmente gli scambi di calore con l'esterno, aumentando il coefficiente di riflessione. Il vaso V poggia su dei supporti in materiale isolante per diminuire, congiuntamente con le intercapedini di aria fra i due vasi, la dispersione del calore rendendo il calorimetro per quanto possibile adiabatico. Inoltre l'acqua contenuta nel recipiente più esterno R grazie al suo alto calore specifico attenua sensibilmente l'influenza delle variazioni di temperatura esterna durante le misurazioni.

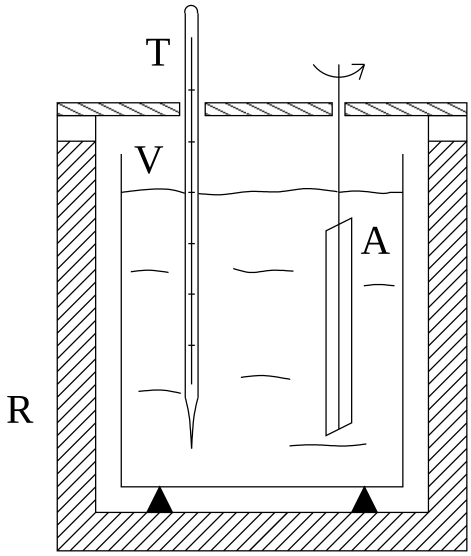

Fig. 1 *Schema del calorimetro delle mescolanze*

Attraverso due fori praticati sul coperchio pescano all'interno del calorimetro un agitatore A, utilizzato per distribuire uniformemente il calore durante le prove, e un termometro T al centesimo di grado, che istante per istante fornisce la temperatura dell'acqua nel vaso più interno.

Si dispone inoltre di un termometro al grado per la misura della temperatura dei corpi da introdurre nel calorimetro, di una bilancia per pesare gli stessi, e di un cronometro.

§ 4 Esecuzione dell'esperienza

La capacità termica del calorimetro è data dalla somma delle capacità termiche delle singole parti che lo compongono. Tenendo conto del fatto che nel vaso calorimetrico viene versata una quantità ben nota di acqua, le parti da prendere in considerazione per il calcolo globale della capacità termica sono l'acqua, il vaso, l'agitatore e la parte immersa del termometro. E' possibile però ipotizzare che le varie componenti del calorimetro costituiscano un'unica entità a cui si fa corrispondere un'unica capacità termica, la quale in teoria non è che la somma delle capacità termiche delle singole parti omogenee del sistema. Esse non sono note, ma devono soddisfare la relazione (3). Si consideri quindi come capacità termica del calorimetro l'espressione

$$C_{cal} = m_T c_T + m_{H_2O} c_{H_2O}$$

dove m_T indica la massa totale del vaso, della parte immersa del termometro e dell'agitatore, m_{H_2O} la massa d'acqua all'interno del vaso V, e c_T è da ricavare sulla base delle considerazioni precedenti. Si definisce poi *equivalente in acqua del calorimetro* una massa m_e di acqua che abbia la stessa capacità termica del calorimetro, ovvero

$$m_e c_{H_2O} = m_T c_T$$

da cui segue che

$$C_{cal} = (m_{H_2O} + m_e) c_{H_2O} \tag{4}$$

La prima parte dell'esperienza consiste nel determinare il calore specifico di un campione di una sostanza, che nel nostro caso è di rame e ha la forma di una treccia, cioè di un filo avvolto a spirale. La sua forma è stata scelta per fornire una grande superficie rispetto alla massa, in modo da facilitare gli scambi di calore con l'acqua. Dopo averlo pesato lo si immerge appeso ad un filo isolante all'interno di un recipiente pieno d'acqua, che viene posta a scaldare su un fornello; la temperatura del corpo può essere rilevata ad ogni istante con un termometro in parte immerso anch'esso e in contatto con la treccia. Si scalda la massa di rame finchè raggiunge una temperatura T_2 prossima a quella di ebollizione dell'acqua. Nel frattempo di versa nel calorimetro una quantità nota di acqua e si misura la temperatura al suo interno ogni minuto, col che quando verrà introdotta la treccia la temperatura T_1 dell'acqua sia ben nota.

Quando il campione di massa ha raggiunto la temperatura voluta, lo si estrae velocemente dal recipiente e lo si introduce nel vaso calorimetrico (in cui l'agitatore in azione permette al calore di distribuirsi uniformemente); al contempo di inizia a leggere la temperatura al suo interno ogni 5 secondi. Questa sale molto rapidamente fino ad un valore T_3 intorno al quale si stabilizza, nel senso che continua a variare ma molto lentamente a causa dell'influenza esterna, in maniera simile a quello che si aveva prima di introdurre la treccia.

La quantità di calore ceduta dal campione al calorimetro e all'acqua contenuta nel vaso è

$$\Delta Q_c = mc_x(T_2 - T_3)$$

dove m è la massa del campione e c_x il suo calore specifico incognito. Viceversa la quantià di calore assorbita dal calorimetro e dall'acqua è

$$\Delta Q_a = (m_{H_2O} + m_e)c_{H_2O}(T_3 - T_1)$$

ed essendo le due quantità di calore ΔQ_c e ΔQ_a uguali si ricava

$$mc_x(T_2 - T_3) = (m_{H_2O} + m_e)c_{H_2O}(T_3 - T_1)$$

ossia

$$c_x = \frac{(m_{H_2O} + m_e)c_{H_2O}(T_3 - T_1)}{m(T_2 - T_3)} \tag{5}$$

Come seconda prova si esegue la misura sperimentale dell'equivalente in acqua del calorimetro. Per far ciò si procede nello stesso modo, solo che invece di porre nel vaso calorimetrico un dato corpo di massa nota si introduce una massa m' di acqua ad una certa temperatura T'_2 nel vaso contenente una massa m'_{H_2O} di acqua a temperatura T'_1. Se T'_3 è la temperatura di equilibrio, la quantità di calore ceduta dall'acqua introdotta è

$$\Delta Q_c = m' c_{H_2O}(T'_2 - T'_3)$$

mentre la quantità di calore assorbita dal calorimetro e dall'acqua è

$$\Delta Q_a = (m'_{H_2O} + m_e) c_{H_2O}(T'_3 - T'_1)$$

da cui

$$m_e = \frac{m'(T'_2 - T'_3)}{T'_3 - T'_1} - m'_{H_2O} \tag{6}$$

che fornisce l'equivalente in acqua del calorimetro.

4.1 Analisi dei dati

Occorre misurare la temperatura ambientale durante l'esperienza.

Per prima cosa si misura l'equivalente in acqua del calorimetro, visto che serve per la successiva misura del calore specifico della treccia di rame. Si riempie il calorimetro con una quantità nota di acqua (va pesata) m'_{H_2O}, e si inizia a misurarne la temperatura ogni minuto. Si prende poi un'altra quantità nota di acqua m' e la si riscalda fino quasi all'ebollizione (è conveniente non portarla ad ebollizione per evitare che una eccessiva evaporazione ne diminuisca considerevolmente la massa rispetto al valore pesato). Se ne misura la temperatura T'_2 e immediatamente la si versa nel calorimetro. Si inizia quindi a misurare la temperatura interna ogni 5 s, quando inizia a stabilizzarsi ogni 10 s e infine nuovamente ogni minuto. Da un grafico della temperatura in funzione del tempo è possibile stimare i valori di T'_1 e T'_3; per mezzo della (6) è quindi possibile determinare il valore di m_e con il suo errore.

In maniera analoga si procede per determinare il calore specifico della treccia. Si svuota il calorimetro e lo si riempie di una nuova quantità nota di acqua m_{H_2O}; si pesa altresì la treccia di rame m e la si riscalda a bagnomaria. Quindi se ne misura la temperatura T_2 e la si immerge immediatamente nell'acqua, di cui si misura la temperatura con le modalità precedenti. Note le temperature iniziale T_1 e finale T_3 si calcola c_x con la (5).

In questo procedimento tuttavia bisogna tener conto del fatto che le pareti del calorimetro non sono perfettamente adiabatiche. Se, come spesso avviene, la temperatura interna si mantiene largamente al di sotto della temperatura ambientale, il calorimetro assorbe continuamente calore dall'esterno: questo comportamento viene segnalato dal fatto che sia prima di introdurre l'acqua o la treccia nel vaso V, sia dopo il raggiungimento della supposta temperatura di equilibrio T_3 o T_3', la temperatura del calorimetro tende ad aumentare, molto lentamente ma in modo regolare, nel tempo.

Se il passaggio dalla temperatura T_1 o T_1' alla temperatura T_3 o T_3' avvenisse molto velocemente, gli scambi di calore fra il calorimetro e l'ambiente circostante si potrebbero trascurare. Poiché ciò in genere non accade, si consideri un diagramma delle temperature in funzione del tempo come in figura Fig. 2

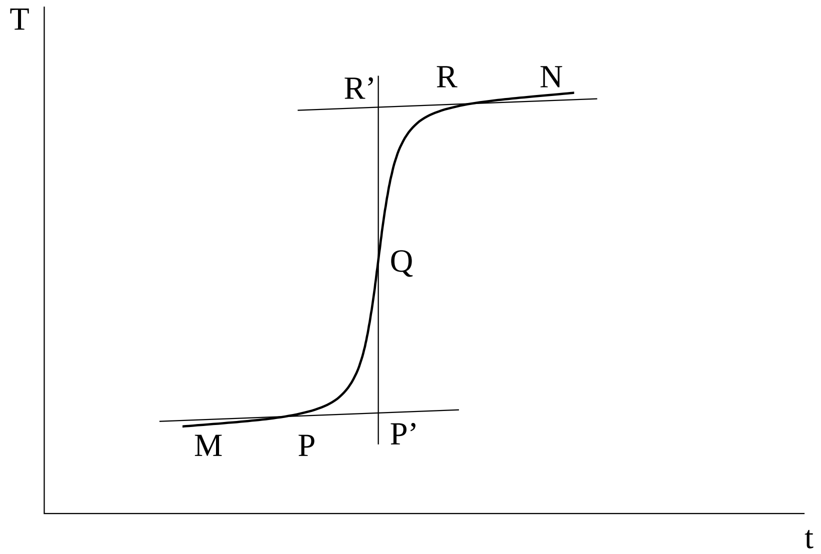

Fig. 2 *Andamento della temperatura all'interno del calorimetro in funzione del tempo*

Riportando sugli assi i valori di T in funzione del tempo t, si ottengono tre tratti di curva MP, PR e RN, che mostrano la variazione della temperatura rispettivamente prima di introdurre la massa nel vaso V, durante lo scambio di calore, e dopo il raggiungimento della temperatura di equilibrio. Si prolunghino i tratti quasi rettilinei MP e NR; si tracci poi una retta parallela alle ordinate che intersechi la curva PR in un punto Q tale che i due triangoli così individuati $PP'Q$ e $RR'Q$ abbiano area uguale, essendo P' e R' le intersezioni della retta verticale con i prolungamenti di MP e RN. In tali intersezioni si leggeranno i nuovi valori di T_1 o T_1' e T_3 o T_3' che sostituiti nella (5) e nella (6) forniranno un valore più corretto di m_e e c_x. Le rette MP e RN si calcolano mediante fit lineare, mentre la posizione del punto Q può anche essere determinata da considerazioni grafiche.

Se invece la salita della temperatura è molto veloce, si può utilizzare un metodo più semplice stimando "ad occhio" le temperature iniziale e finale.

4.2 Discussione

Si confronti il risultato ottenuto con il valore riportato sulle tabelle delle caratteristiche dei metalli. Si discutano le ragioni di una eventuale discrepanza.

Verifica della legge di Boyle

§ 1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza è la verifica della legge di Boyle–Mariotte.

§ 2 Fisica dell'esperienza

La *legge di Boyle–Mariotte* o *legge dell'isoterma* afferma che per un gas ideale a temperatura costante il prodotto della sua pressione p per il suo volume V è costante

$$pV = K$$

Ad una data temperatura quindi l'andamento della pressione in funzione del volume è rappresentato da un ramo di iperbole equilatera sul piano di Clapeyron (Fig. 1)

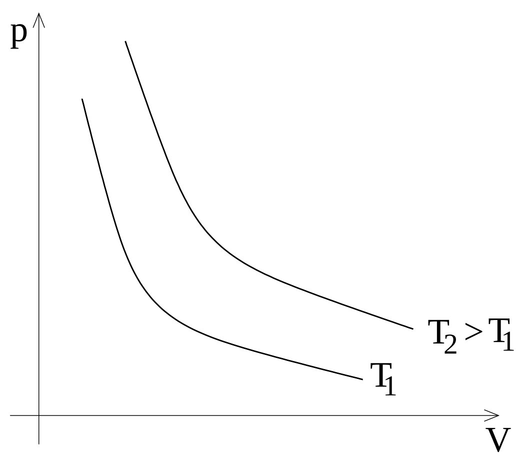

Fig. 1 *Andamento qualitativo delle isoterme di un gas perfetto*

Per i gas reali la legge di Boyle–Mariotte non si applica sempre, ma solo quando possono essere considerati come ideali; ciò avviene a basse pressioni e ad alte temperature, perché in queste condizioni possono essere trascurate le forze fra le molecole che costituiscono i gas. L'aria ad esempio può essere considerata un gas perfetto già a temperatura ambiente e fino a 25 atmosfere di pressione con un errore di pochi percento.

§ 3 Descrizione della strumentazione

Lo strumento a disposizione per la verifica della legge di Boyle (Fig. 2) consiste in un cilindro di plexiglas a tenuta stagna entro il quale scorre un pistone, anch'esso a tenuta, mosso da una manopola mediante un'asta filettata. Tale pistone consente di comprimere il gas contenuto all'interno del cilindro. Un manometro posto ad una estremità fornisce la pressione del gas.

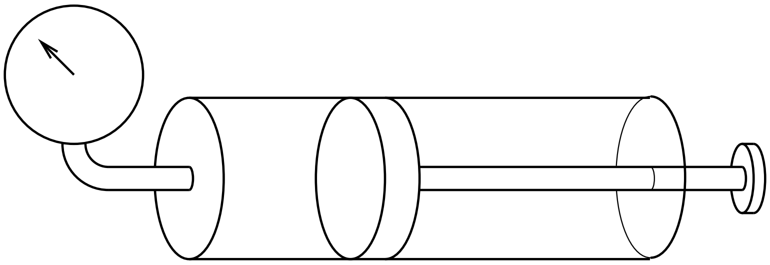

Fig. 2 *Schema del cilindro a gas*

§ 4 Esecuzione dell'esperienza

L'esperienza consiste nel variare il volume del gas ruotando l'apposita manopola; la posizione del pistone è fornita da una scala graduata posta a lato del cilindro. A scelta è possibile fermarsi su valori predeterminati di pressione leggendo le corrispondenti posizioni del cilindro, o viceversa fermarsi su posizioni predeterminate del cilindro leggendo i corrispondenti valori di pressione (volendo possono essere usati entrambi i metodi). E' consigliabile però muoversi sempre in una direzione, vale a dire o sempre comprimendo o sempre espandendo il gas; è opportuno anche attendere un certo tempo prima di leggere i valori sulle scale per dar modo al gas di raggiungere l'equilibrio termico con l'ambiente esterno: infatti è necessario che la temperatura del gas sia sempre la stessa.

4.1 Analisi dei dati

I dati raccolti, con i proprî errori, vanno riportati in un grafico. Su questo occorre eseguire un fit per verificare, valutando il corrispondente χ^2, se i dati siano compatibili con un andamento iperbolico. E' possibile eseguire direttamente un fit iperbolico sui dati raccolti; se si preferisce, è possibile anche eseguire in fit lineare: è sufficiente infatti prendere i logaritmi dei dati raccolti, col che la legge da testare diventa

$$\ln p + \ln V = \ln K = C$$

e posto $\ln p = y$ e $\ln V = x$ si può eseguire un fit del tipo $y = ax + b$: occorrerà allora verificare non solo la bontà del fit valutando il suo χ^2, ma anche la compatibilità entro gli errori del parametro a col valore -1 come ci si aspetta se il legame tra p e V è dato dalla legge di Boyle.

Infine con entrambi i metodi è possibile ricavare il valore di K per l'aria alla temperatura alla quale è stata effettuata l'esperienza (pari alla temperatura ambientale).

4.2 Discussione

Si confrontino i risultati ottenuti con i valori aspettati; si discutano le ragioni di una eventuale discrepanza.